TARSKI ALFRED – ur. 14 I 1901 w Warszawie, zm. 27 X 1983 w Berkeley, Kalifornia, USA. Logik i matematyk, wywarł znaczący wpływ na rozwój całej dwudziestowiecznej logiki i podstaw matematyki, a poprzez badania z zakresu semantyki formalnej i podstaw logiki także na epistemologię, metodologię nauk i filozofię języka. Wybitny przedstawiciel szkoły lwowsko-warszawskiej oraz twórca szkoły logiki i metodologii nauk w Berkeley (The Group in Logic and the Methodology of Science). Pozostawił po sobie bogatą i rozległą spuściznę naukową z logiki, metamatematyki, semantyki, teorii mnogości, podstaw geometrii, algebry ogólnej oraz logiki algebraicznej (algebra Boole'a, algebry Boole'a z operatorami, algebry relacyjne, algebry cylindryczne); niemal całą twórczość T. przenikają idee algebry. Wrażliwy na idiom języka, pisał precyzyjnie i jasno, przekonująco przedstawiał rozważane zagadnienia od strony historycznej i intuicyjnej. Był charyzmatycznym nauczycielem i wykładowcą. W badaniach naukowych uwzględniał wartości estetyczne, podkreślał „wewnętrzny urok i piękno" teoretycznych konstrukcji. Opowiadał się za wolnością nauki.

BIOGRAM.

Był synem Ignacego i Róży z d. Prussak Tajtelbaumów. W 1922 przyjął chrzest w kościele rzymskokatolickim, a w 1924 zmienił nazwisko na „Tarski". Pracował twórczo ponad sześćdziesiąt lat: do sierpnia 1939 w Warszawie, potem w USA — najpierw na Wschodnim Wybrzeżu, a od września 1942 do końca życia na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley.

I Okres warszawski. W 1918–1924 studiował matematykę na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Warszawskiego; doktoryzował się u S. Leśniewskiego w 1924 na podstawie tezy *O wyrazie pierwotnym logistyki*, a rok później habilitował i uzyskał *veniam legendi* z filozofii matematyki oraz został docentem UW. Prowadził ćwiczenia i wykłady zlecone z teorii mnogości, metodologii matematyki, podstaw geometrii szkolnej, arytmetyki liczb naturalnych i rzeczywistych. Od 1 X 1929 starszy asystent, a od 1 X 1934 adiunkt w Seminarium Filozoficznym Jana Łukasiewicza; starał się o objęcie katedry na UJK we Lwowie (1930) oraz na Uniwersytecie Poznańskim (1937), ale bez rezultatu. Uczył też matematyki w warszawskim Gimnazjum im S. Żeromskiego. W Warszawie prowadził nadzwyczaj intensywne i różnotematyczne badania w zakresie logiki matematycznej, semantyki, teorii

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

mnogości, teorii miary, podstaw geometrii, dydaktyki logiki i geometrii, i cała jego późniejsza twórczość wyrasta z tego korzenia. Uznanie i rozgłos przyniosły mu prace dotyczące rachunku zdań, metodologii nauk dedukcyjnych, arytmetyki liczb kardynalnych i aksjomatu wyboru oraz pojęcia prawdy. Opublikował wtedy 3 książki — w tym najsłynniejszą *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933) oraz *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej* (1936), która później miała 4 wydania angielskojęzyczne i została przetłumaczona na 12 języków — 62 artykuły i 16 streszczeń. Już około roku 1930 stał się czołową postacią warszawskiej szkoły logicznej i matematycznej, współpracując niemal ze wszystkimi jej wybitnymi przedstawicielami — publikował wspólnie z S. Banachem (praca o rozkładach zbiorów w przestrzeniach metrycznych, zawierająca tzw. paradoksalny rozkład kuli) i A. Lindenbaumem (teoria mnogości, teoria definiowalności), ze swoimi nauczycielami J. Łukasiewiczem (słynna praca *Untersuchungen über den Aussagenkakül*, 1930), K. Kuratowskim (zbiory rzutowe) i W. Sierpińskim (liczby kardynalne nieosiągalne) oraz swoim uczniem A. Mostowskim (algebry Boole'a o uporządkowanych bazach). Uczestniczył aktywnie w rodzimym i międzynarodowym życiu naukowym. Był częstym prelegentem na posiedzeniach Warszawskiego Towarzystwa Filozoficznego i PTF we Lwowie, Towarzystwa Matematycznego oraz Towarzystwa Naukowego Warszawskiego; brał udział w Polskich Zjazdach Filozoficznych (1923, 1927, 1936) i Polskich Zjazdach Matematycznych (1927, 1937), w międzynarodowych konferencjach matematycznych i filozoficznych: Bolonia (1928), Warszawa (1929), Praga (1934), Paryż (1935) i Amersfoort (1938). Odegrał pierwszorzędną rolę w ustaleniu kontaktów między szkołą warszawską i wiedeńską; dzięki wizytom T. we Wiedniu (1930, 1935) i jego odczytom na Kongresie Filozofii Naukowej w Paryżu (1935) *O naukowej semantyce* i *O pojęciu wynikania logicznego* logika polska wywarła istotny wpływ na Koło Wiedeńskie.

II Okres amerykański. 21 VIII 1939 przybył do USA z wizytą naukową (konferencja Jedności Nauki, Harvard University oraz tourneé odczytowe po kilku uniwersytetach). Na skutek wybuchu wojny i dalszego jej przebiegu pozostał w Ameryce na zawsze. Do lata 1942 na Wschodnim Wybrzeżu — tymczasowo na Harvardzie, CUNY oraz w Institute for Advanced Study w Princeton. Nawiązał wtedy współpracę z P. Erdösem (wspólny artykuł o ciałach zbiorów i wielkich liczbach kardynalnych, 1943) i J. C. C. McKinsey'em (badania nad algebraicznymi aspektami topologii ogólnej i zastosowaniem metod topologicznych do logiki intuicjonistycznej i modalnej, opublikowane w postaci trzech wspólnych rozpraw w latach 1944–48) oraz odnowił kontakty z K. Gödlem, R. Carnapem, W.V.O. Quine'em. W 1941 ogłosił przełomową dla logiki algebraicznej pracę *On the calculus of relations*.

Od X 1942 wykładowca, a od 1948 do końca życia profesor zwyczajny w Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

II 1. Do 1956 T. zrealizował kilka znaczących przedsięwzięć badawczych i organizacyjnych, dzięki którym ugruntował swoją wybitną pozycję naukową w skali światowej.

Po pierwsze, T. zakończył niektóre ważne prace badawcze rozpoczęte jeszcze przed wojną i ogłosił je drukiem. Są to m.in.: 1) artykuł *The semantic conception of truth and the foundation of semantics* (1944), będący nietechnicznym wykładem semantyki Tarskiego, adresowanym do środowiska filozoficznego; 2) monografia *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* (19481, 19512), z wielkim uznaniem przyjęta przez matematyków (patrz poniżej); 3) książki: *Cardinal Algebras* (1949) i *Ordinal Algebras* (1956). W obu rozwinięta została część wyników ogłoszonych bez dowodu w ważkim artykule *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* (współautor: A. Lindenbaum, 1926). W zredagowaniu *CA* istotną rolę odegrał J. C. C. McKinsey i pierwsi amerykańscy uczniowie Tarskiego: L. H. Chin i B. Jónsson; *OA* też powstały kolektywnie — przy współudziale C. C. Changa i Jónssona. 4) antologia *Logic*, *Semantics*, *Metamathematics*: *Papers from 1928 to 1938* (1956), zawierająca angielskie przekłady, J. H. Woodgera, 17 prac z logiki, teorii prawdy i metodologii nauk dedukcyjnych; dzięki *LSM* przedwojenny dorobek T. stał się w świecie szeroko dostępny.

Po drugie, T. wytyczył nowe kierunki badań, które dotyczyły logiki algebraicznej, problemu rozstrzygalności oraz teorii modeli. W nurcie logiki algebraicznej powstały wielkie prace z McKinseyem: *The algebra of topology* (1944) i *On closed elements in closure algebra* (1946), z Jónssonem *Boolean algebra with operators* (1951, 1952) oraz rozpoczęte zostały prace nad algebraizacją logiki kwantyfikatorów za pomocą algebr cylindrycznych. Podstawy teorii algebr cylindrycznych zostały opracowane przez T. i jego uczniów L. H. Chin i F. B. Thompsona w latach 1948–52 (cf. streszczenie *Some general properties of abstract cylindric algebras*, współautor: F. B. Thompson), a szeroko zakrojone nad nimi studia w szkole T. trwały do lat dziewięćdziesiątych XX w. Badania nad zagadnieniem rozstrzygalności zostały podsumowane w niewielkiej książce *Undecidable Theories* (współautorzy: A. Mostowski i R. Robinson, 1953), uznanej za arcydzieło literatury logicznej (O osiągnięciach T. w dziedzinie rozstrzygalności piszemy poniżej.) W artykułach: *Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics* (1952) i *Contributions to the theory of models: I, II, III* (1954–55) T. wprowadził podstawową aparaturę pojęciową teorii modeli — wyspecjalizowanego fragmentu semantyki teoriomnogościowej dla teorii sformalizowanych — i pokazał jej użyteczność, dowodząc m.in. ważnego twierdzenia, że klasa reprezentowalnych algebr relacyjnych jest aksjomatyzowalna za pomocą samych równości; jednym z zadań, jakie T. stawiał przed teorią modeli, była matematyczna charakterystyka pojęć metamatematycznych i metalogicznych, jak np. klasa arytmetyczna, definiowalność, elementarna równoważność,. T. odegrał też ważną rolę w sformułowaniu ogólnej definicji produktu zredukowanego i wskazał za możliwe zastosowania produktów zredukowanych. W 1957–62 uczniowie i współpracownicy T. (Chang, J. Keisler, D. Scott, T. Frayne, A. Morel) osiągnęli klasyczne wyniki z nowoczesnej teorii modeli używając metody produktów zredukowanych. T. jest też twórcą logiki predykatów z wyrażeniami nieskończenie długimi (1957) i pomysłodawcą teorii modeli dla języków infinitarnych; teoria ta i jej zastosowania do badań liczb kardynalnych nieosiągalnych powstała w jego szkole (C. Karp, W. Hanf, Scott).

Po trzecie, około 1956 stworzony przez T. na Uniwersytecie Berkeley ośrodek studiów podstawowych osiągnął stabilizację, miał sprecyzowany program badań i kształcenia na poziomie doktorskim. (Program trwał od 1952 do 1970; zachowały się po nim oficjalne sprawozdania.) W celu umocnienia i rozszerzenia współpracy międzynarodowej T. zorganizował w Berkeley dwa sympozja: jedno 1957/58 poświęcone metodzie aksjomatycznej, ze szczególnym podkreśleniem jej zastosowań w geometrii i fizyce, drugie w 1963 na temat teorii modeli. Plonem tych konferencji są pokaźne tomy, współredagowane przez T.: *The Axiomatic Method* (1959) i *The Theory of*

Models (1965); zawarte w nich prace ukazują wielorakie związki między metodą aksjomatyczną i teorią modeli.

II 2. W kolejnych latach, aż do momentu przejścia na pełną emeryturę w 1973, T. kontynuował badania w zakresie niemal wszystkich tematów wcześniejszych, przy czym na pierwszym planie znalazła się algebra uniwersalna, logika równościowa i algebry cylindryczne, oraz podstawy geometrii (patrz niżej). W ***Cylindric Algebras***, *Part I* (1971) rozdział zerowy jest piękną monografią algebry ogólnej. Resztę życia, wspomagany przez S. Givanta, poświęcił książce ***A formalization of set theory without variables***, będącą swoistą sumą jego dokonań w logice (patrz niżej).

W 1956–57 był prezydentem International Union of History and Philosophy of Science. W ramach unii powołał Division of Logic, Methodology, and Philosophy of Science, której zadaniem jest organizacja międzynarodowych kongresów logiki, metodologii i filozofii nauki. Tworząc DLMPS, Tarski urzeczywistnił — pod pewnym względem i na większą skalę — przedwojenną ideę jedności nauki.

T. wykładał gościnnie na wielu uniwersytetach amerykańskich i zagranicznych, uczestniczył w ogromnej liczbie konferencji, sympozjów i kongresów. Kochał podróże i był ciekawy świata. Był uczonym, który sensu swej pracy nie upatrywał jedynie w osiągnięciu wyniku w postaci twierdzenia czy teorii, ale widział go również we wspólnym wysiłku w kierunku odkrycia prawdy naukowej. Wykształcił znakomitą grupę 24 doktorów (wśród których są A. Mostowski, Wanda Szmielew, R. Vaught, R. Montague, J. Keisler) i opublikował wiele prac we współautorstwie z innymi.

Interesował się życiem kulturalnym i naukowym w powojennej Polsce. Wielu polskich logików, filozofów i matematyków skorzystało z jego gościnności i opieki naukowej w Berkeley. Do kraju przyjechał kilka razy, m.in. na sympozjum „Metody infinitystyczne” (Warszawa, wrzesień 1959; odwiedził wtedy Wrocław), na kolokwium metodologiczne o uzasadnianiu twierdzeń i decyzji (1961) oraz na konferencję poświęconą algebrze ogólnej (wrzesień 1964).

Doktor *honoris causa* uniwersytetu Pontifica Universidad Católica de Chile, 1974; Université d’Aix-Marseille II, 1978; Calgary University, 1982. Otrzymał też The Berkeley Citation, najwyższe odznaczenie przyznawane

PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

przez Uniwersytet Kalifornijski. Był członkiem US National Academy of Science, British Academy i Holenderskiej Akademii Nauk.

Dzieła A. Tarskiego

[86m] ***Collected Papers. Volume* 1, *1921-1934*; *Volume* 2, *1935–1944*; *Volume* 3, *1945–1957*; *Volume* 4, *1958–1979*** (S. R. Givant and R. N. McKenzie, editors). Birkhäuser, Basel – Boston – Stuttgart 1986, XII + 658 ss. (t. 1), XII + 699 ss. (t. 2), XII + 682 ss. (t. 3), XII + 757 ss. (t. 4).

Adnotacja do [86m]: [Antologia zawiera wszystkie prace Tarskiego, które są artykułami, streszczeniami (abstraktami), recenzjami, głosami w dyskusjach bądź zadaniami i problemami, **nie** zawiera więc książek ani prac, które ukazały się jako fragmenty oddzielnych książek sygnowanych przez Tarskiego, ani raportów z badań. Artykuły w antologii są reprodukowane jako fotograficzne kopie oryginałów, i wypełniają całe trzy pierwsze tomy i połowę tomu czwartego; pierwszy artykuł pochodzi z r. 1921, a ostatni z 1979. (Antologia nie zawiera żadnej publikacji pośmiertnej T. Listę książek T. oraz niektórych prac pośmiertnych T. podajemy niżej.) Ponadto, w t. 3 zamieszczony jest angielski przekład T. i D. Rynina, artykułu T. Kotarbińskiego *Zasadnicze myśli pansomatyzmu*, a w t. 4, reprint pracy: S. Givant, *Bibliography of Alfred Tarski* (JSL, 45, nr 4, 1986, której przekład uzupełniony jest opublikowany w [01m]). *Uwagi*: (1) W t. 4, s. 685, zamiast zadania nr 39, które nie pochodzi od Tarskiego, powinno być zadanie nr 38 (z Fund. Math, t.7, s. 381). (2) W antologii brakuje: a) pracy Tarskiego *O pewnym systemie logiki matematycznej i wynikających z niego zagadnieniach metodologicznych i semantycznych*, Ruch Filozoficzny, t.12 (1930–1931), s. 228b, która powinna się znaleźć w t. 4 w dziale *Abstracts* oraz b) głosu Tarskiego w dyskusji nad referatem J. Łukaszewicza *O definicjach w teorii dedukcji*, Ruch Filozoficzny, t. 11 (1928–1929), s. 178a.]

A. Książki (monografie) UWAGA: oznaczenia typu [33m] są przejęte z pełnej bibliografii Tarskiego; takich samych skrótów używałem w Biogramie)

[33m] ***Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych***. „Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych", nr. 34, Warszawa 1933, VII + 116 s. + errata.

[35m] ***Geometrja dla trzeciej klasy gimnazjalnej.*** (Współautorzy: Z. Chwiałkowski i W. Schayer). Państwowe Wydawnictwo Książek i Pomocy

Szkolnych, Lwów 1935, 108 ss. (Drugie wyd., Sekcja Wydawnicza Armii Polskiej na Wschodzie w Jerozolimie, 1944, 108 ss. Przedruk nakładem Polskiego Związku Wychodźctwa Przymusowego w Hanowerze, Hanower 1946.)

[36m] ***O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej***. „Bibljoteczka matematyczna”, t. 3–5, Książnica-Atlas, Lwów – Warszawa 1936, 167 ss.

(1) *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik.* Julius Springer Verlag, Wien 1937, X + 166 ss. (Niemiecki przekład [36m].)

[41m] ***Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences***. Oxford University Press, Oxford – New York 1941, XVIII + 239 ss. (Poszerzony i poprawiony przekład angielski [36m](1) O.Helmera.)

(2) Czwarte poprawione wydanie [41m], red. Jan Tarski, „Oxford Logic Guides”, t. 24, Oxford University Press, New York – Oxford 1994, XXIV + 229 ss.

(3) *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych*, Filia UW w Białymstoku – Philomath – Aleph, Warszawa 1996, XXVI + 261. (Przekład [41m](2) Moniki Sujczyńskiej.)

[Książka [41m] przetłumaczona została jeszcze na język rosyjski, hiszpański (trzy wydania), włoski, holenderski, hebrajski (dwa wydania), francuski, bułgarski, szwedzki, niemiecki (pięć wydań), czeski, gruziński, serbsko-chorwacki.]

[47m] ***Direct Decompositions of Finite Algebraic Systems***. (Współautor: B. Jónsson.) „Notre Dame Mathematical Lectures”, t. 5, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana 1947, VI + 64 ss. + errata.

[48m] ***A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry***. (Przygotowane do druku przez J. C. C. McKinsey’a.) U. S. Air Force Project RAND, R-109, the RAND Corporation, Santa Monica, California 1948, IV + 60 ss.

(1) Drugie, poprawione wydanie [48m] (przygotowane do druku przy pomocy J. C. C. McKinsey’a), University of California Press, Berkeley – Los Angeles, California 1951, III + 63 ss.

(3) Przekład polski w [01m].

[49m] ***Cardinal Algebras***, with an appendix *Cardinal products of isomorphism types* (B. Jónssona i A. Tarskiego). Oxford University Press, Oxford – New York 1949,

XII + 327 ss.

[53m] ***Undecidable Theories***. (Współautorzy: A. Mostowski i R. M. Robinson.) North- Holland Publishing Co., Amsterdam 1953, XII + 98 ss.

(1) przekład polski I części pt. *Ogólna metoda dowodów nierozstrzygalności* w [01m].

[56m] ***Logic*, *Semantics*, *Metamathematics*. *Papers from 1923 to 1938***. Clarendon Press, Oxford 1956, XIV + 471 ss. (Przełożył J. H. Woodger.)

(1) Drugie, poprawione wydanie ze wstępem i analitycznym indeksem pojęć oraz pod redakcją J. Corcorana, Hackett Publishing Co., Indianapolis, Indiana 1983, XXX + 506 ss.

[56ma] ***Ordinal Algebras***, with appendices *Some additional theorems on ordinal algebras* by C. C. Chang and *A unique decomposition theorem for relational addition* by B. Jónsson. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956, 133 ss.

[67m] ***An Extended Arithmetic of Ordinal Numbers***. (Współautor: J. Doner.) System Development Corporation, report SP-2811/000/00, Santa Monica, California, 58 ss.

[67ma] ***The Completeness of Elementary Algebra and Geometry***. Institute Blaise Pascal, Paris 1967, IV + 50 ss. (Jest to reprint pracy, z ocalałych szczotek korektorskich, która miała się ukazać w r. 1940 w „Actualités Scientifiques et Industrielles", Hermann et Cie, Paryż, ale z powodu wojny druk nie doszedł do skutku.)

(1) Polski przekład fragmentu w [01m].

[71m] ***Cylindric Algebras. Part I.*** *With an Introductory Chapter*: *General Theory of Algebras*. (Współautorzy: L. Henkin i J. D. Monk.) North-Holland Publishing Co.,

Amsterdam 1971, VI + 508 ss.

[72m] ***Logique*, *sémantique*, *métamathématique*: *1923–1944***. T.1, „Philosophies pour l'Âge de la Science". Librairie Armand Colin, Paris 1972,

PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

VIII + 276 ss. (Francuskie wydanie części [56m] (artykuły I –VIII) pod red. G. Grangera.)

[74m] ***Logique*, *sémantique*, *métamathématique*: *1923–1944*.** T.2, „Philosophies pour l'Âge de la Science”. Librairie Armand Colin, Paris 1974, 331 ss. (Francuskie wydanie części [56m] (artykuły IX–XVII z [56m]) plus dodatkowe cztery prace pod red. G. Grangera.)

[81m] ***Cylindric Set Algebras***. (Współautorzy: H. Andréka, L. Henkin, J. D. Monk, I. Németi.) „Lecture Notes in Mathematics”, t. 883, Springer-Verlag, Berlin – New York

1981,VIII + 323 ss.

[83m] ***Metamathematische Methoden in der Geometrie***. (Współautorzy: W. Schwabhäuser, W. Szmielew.) „Hochschultext”, Springer-Verlag, Berlin 1983, VIII + 482 ss.

[85m] ***Cylindric Algebras. Part II***. (Współautorzy: L. Henkin, J. D. Monk.) North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1985, VII + 302 ss.

[87m] ***A Formalization of Set Theory without Variables***. (Współautor: S. R. Givant.) „American Mathematical Society Colloquium Publications”, t. 41, American

Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1987, XXI + 318 ss.

[94m] ***Pisma logiczno-filozoficzne.*** *Tom* 1: ***Prawda***. Wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, wstępem i przypisami opatrzył J. Zygmunt, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, XXIV + 390 ss + errata. (Krytyczne wydanie wszystkich prac Tarskiego o prawdzie i semantyce. Zawiera też kompletną, do r.1993, bibliografię prac Tarskiego.)

[01m] ***Pisma logiczno-filozoficzne***. *Tom* 2: ***Metalogika***. Wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, przypisami opatrzył i wstępem poprzedził J. Zygmunt, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001, XIV + 516 ss. (M.in. przekłady najważniejszych artykułów z metodologii nauk dedukcyjnych, teorii definiowalności i rachunków logicznych oraz [48m], fragmentu [67ma] i rozdz. I z [53m].)

Artykuły pośmiertne

[86] *What are logical notions?*. Wstęp i redakcja: J. Corcoran. „History and Philosophy of Logic”, 7 (1986), 143–154. (Przekład polski w [01m].)

[86a] *Representable cylindric algebras*. (Współautorzy: L. Henkin i J. D. Monk) „Annals of Pure and Applied Logic”, 31 (1986), 23–60.

[93] *Sur la théorie des modéles.* „L'Âge de la Science. Lectures philosophiques”, t. 5, *Philosophie de la logique et philosophie du language*, Editions Odile Jacob, Paris 1993, s. 137–158. (Francuski przekład wykładu, który A. Tarski wygłosił na 70. międzynarodowym kolokwium CNRS „Le Raisonnement en mathématiqus et en

sciences exprimentales”, Paryż, 26.09 – 1.10.1955; redakcja: Anne Preller.) (Przekład polski w [01m].)

[95] *Some current problems in metamathematics* (ed. by J. Tarski and J. Woleński). „History and Philosophy of Logic”, 16 (1995), 159–168. (Przekład polski w [01m].)

[99] *Tarski's system of geometry.* (Współautor: S. Givant.) „The Bulletin of Symbolic Logic”, 5 (1999), 175–214.

[00] *Address at the Princeton University Bicentennial Conference on Problems of Mathematics* (December 17–19, 1946), (edited with additional material and an introduction by H. Sinaceur). „The Bulletin of Symbolic Logic”, 6 (2000), 1–44.

(Niezależna edycja polska w [01m].)

[02] *On the concept of following logically,* „History and Philosophy of Logic”, 23 (2002), s. 155–196. (Translated from the Polish and German by Magda Stroińska and David Hitchcock. Nowy przekład artykułu „O pojęciu wynikania logicznego” i jego wersji niemieckiej wraz z obszernymi komentarzami historycznymi i lingwistycznymi.)

[2007] F. Rodrigez-Consuegra, *Two unpublished contributions by Alfred Tarski*, „History and Philosohy of Logic”, 28 (2007), 155–196. [Artykuł, choć nie podpisany nazwiskiem Tarskiego, zawiera dwa zredagowane, obszerne wystąpienia Tarskiego w dyskusjach na dwóch konferencjach: połączonym zjeździe ASL i APS w Chicago (kwiecień 1965) oraz International Colloquium in the Philosophy of Science, Londyn (lipiec 1965).

TEORIA MNOGOŚCI. Teoria mnogości była dla T. jednym z głównych przedmiotów badań, zarazem ogólnym narzędziem w metamatematyce, algebrze uniwersalnej i logice infinitarnej. Interesował się nią przez całe życie: jako autor debiutował w 1921 skromnym artykułem [21], w którym analizował definicję zbioru dobrze uporządkowanego, a jedna z ostatnich jego opublikowanych prac [78], wspólna z J. E. Donerem i A. Mostowskim, to wielkie metamatemtyczne studium elementarnej teorii dobrego porządku, czyli teorii rozumianej jako zbiór wszystkich zdań w języku I rzędu, prawdziwych w każdej dziedzinie $\langle U, R \rangle$, przy czym R jest relacją dobrze porządkującą zbiór U. Jest współautorem (z R. M. Montague i D. S. Scottem) nieopublikowanej dotąd książki *An Axiomatic Approach to Set Theory* (1972).

Teoriomnogościowe prace T. dotyczą głównie ogólnej teorii mnogości, jej związków z teorią miary i algebrami Boole'a oraz przedstawieniu niektórych jej fragmentów w postaci abstrakcyjnego rachunku algebraicznego. Oto niektóre wybrane osiągnięcia:

1. Filozoficznie i formalnie doniosła analiza pojęcia zbioru skończonego w ramach ogólnej teorii mnogości, bez użycia aksjomatu wyboru i aksjomatu nieskończoności, oraz wykazanie tezy, że arytmetykę liczb naturalnych można rozwinąć, przyjmując następującą definicję: *zbiór jest skończony*, *jeżeli w każdej niepustej rodzinie jego podzbiorów istnieje element minimalny ze względu na inkluzję* (cf. [24c]). Ponadto T. udało się za pomocą pojęcia skończoności sformułować zdania równoważne pewnikowi wyboru, oraz zdanie równoważne uogólnionej hipotezie kontinuum (np. „*zbiór X jest skończony wtedy i tylko wtedy*, *gdy ma co najwyżej jeden element lub da się rozbić na dwa rozłączne zbiory*, *z których każdy ma moc mniejszą niż X*" (cf. [38c], s. 163). W [65a] T. ogłosił kilka wyników na temat zbiorów, które na gruncie teorii mnogości bez aksjomatu wyboru są jednocześnie nieskończone w zwykłym sensie i skończone w sensie Dedekinda. Badania nad pojęciem skończoności z inspiracji T. prowadził przed wojną A. Mostowski, a w latach sześćdziesiątych XX w. aż po czasy współczesne tacy autorzy, jak: A. Lévy, A.L. Rubin i J.E. Rubin, E. Ellentuck, J. Truss, oraz A. C. Walczk-Typke.

2. Rozbudowa arytmetyki liczb kardynalnych, zwłaszcza potęgowania alefów, i odkrycie w tej dziedzinie wielu zdań równoważnych aksjomatowi wyboru, np. „m2 = m *dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej* m". W [24p]

T. postawił pytanie, czy zdanie „2·m = m *dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej* m” jest równoważne aksjomatowi wyboru, które doczekało się negatywnej odpowiedzi dopiero w r. 1975 (G. Sageev).

3. Badanie roli aksjomatu wyboru w teorii mnogości (cf. [24], [25], [26], [38d], [48b], [49]). Spośród licznych tu wyników wyróżnić trzeba następujące twierdzenie Lindenbauma i T.: *uogólniona hipoteza kontinuum implikuje aksjomat wyboru* (cf. [26]). Studia nad słabszymi wersjami aksjomatu wyboru, jak np. zasada wyborów zależnych ([48b]) i twierdzenie o ideale pierwszym dla algebr Boole'a ([54af], [54ag],[54ah]).

4. Położenie fundamentów pod teorię wielkich liczb kardynalnych, jakimi są: liczby nieosiągalne (wspólna z Sierpińskim definicja liczby mocno nieosiągalnej [30a] oraz sformułowanie „aksjomatu zbiorów nieosiągalnych” [38a]), liczby silnie zwarte, mierzalne i słabo zwarte (cf. [62] oraz prace z P. Erdösem [43] i [61b], i J. Keislerem [64]) oraz wskazanie na związek tej tematyki z logikami infinitarnymi (prace Hanfa i innych uczniów Tarskiego).

5. Algebraizacja sporych fragmentów ogólnej teorii mnogości. Podumowaniem tego kierunku badań są książki *Cardinal Algebras* [49m] i *Ordinal Algebras* [56 ma]. *CA* to aksjomatyczne studium nowego typu systemów algebraicznych, które mają swe źródło w arytmetyce liczb kardynalnych, rozkładach algebr abstrakcyjnych na produkty proste oraz w algebraicznych aspektach teorii miary. *OA* zaś jest aksjomatycznym studium nowej klasy algebr, wyabstrahowanych z pojęcia typu relacyjnego (relacji dwuczłonowych) i dwóch działań określonych na typach: dodawania i konwersu. Zarówno w algebrach kardynalnych, jak i porządkowych występuje jedno działanie infinitarne — suma o przeliczalnie nieskończonej liczbie składników — co nie było wówczas „zgodne z ortodoksyjnym algebraicznym punktem widzenia”. W obu książkach używa się podobnych metod badań i wykładu, i w obu rozwinięte zostały wyniki pochodzące z *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* [26] (współautor A. Lindenbaum).

Teoriomnogościowe idee i rezultaty T. wywarły istotny wpływ na kształt klasycznych działów teorii mnogości, o czym dobitnie świadczą np. liczne prace Sierpińskiego, w których autor podaje dowody zakomunikowanych jedynie przez T. twierdzeń czy rozwiązuje stawiane przez T. problemy (cf. W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, wyd. 3, 1928, oraz *Cardinal and Ordinal*

Numbers, wyd. 2, 1965); także niektóre fragmenty *Teorii mnogości* (wyd. 3, 1976) K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego napisane są z pozycji osiągnięć Tarskiego.

GEOMETRIA. Geometria, podobnie jak i inne działy klasycznej matematyki, była dla T. źródłem inspiracji do tworzenia aparatury pojęciowej metamatematyki i dziedziną, w której następnie tę aparaturę testował i stosował.

W kontekście geometrii T. rozważał, i to pod wieloma względami, kwestie doboru pojęć pierwotnych, układu aksjomatów oraz bazy logicznej dla określonych systemów geometrii (afinicznej, hiperbolicznej, eliptycznej, Euklidesowej i rzutowej); zajmował się definiowalnością i niezależnością pojęć oraz zupełnością i rozstrzygalnością tych systemów

(cf. [29], [34], [56b] — wspólna praca z E. W. Bethem; [56c], oraz [65a] i [79]— prace z L. Szczerbą). Znaczenie geometrii dla zastosowań metody aksjomatycznej podkreślone zostało już w samym tytule zredagowanego przez T. zbioru prac [59e].

Pierwsza praca T. dotycząca geometrii, *O równoważności wielokątów*, tj. [24b], miała jednak inny charakter, bowiem dotyczyła mnogościowego aspektu geometrii płaszczyzny, związanego z teorią miary. Jest to praca ważna również z historycznych względów. Po raz pierwszy został w niej sformułowany wynik, który przeszedł do historii jako *paradoks Banacha-Tarskiego*, oraz postawione zostało proste pytanie: czy „koło i wielokąt o równych polach są równoważne?” Pytanie (powtórzone w [25p] okazało się trudne i zyskało sławę po nazwą „Tarski Circle Squaring Problem”, w której pobrzmiewa echo antycznego zagadnienia kwadratury koła. Dopiero w 1990 M. Laczkovich udowodnił, że problem Tarskiego ma rozwiązanie pozytywne, a liczba części, na które trzeba podzielić koło, by następnie złożyć z niego kwadrat jest rzędu 1050 (cf. Laczkovich 1990). W [24b] T. rozważał naturalne uogólnienie szkolnego pojęcia równoważności wielokątów przez skończony rozkład na wielokąty; przyjął mianowicie, że dwie dowolne figury geometryczne są *równoważne*, jeżeli „dają się one podzielić na jednakową skończoną liczbę figur geometrycznych, nie posiadających żadnych punktów wspólnych i odpowiednio przystających”. Stosując pewne twierdzenie Banacha z teorii miary, będące konsekwencją aksjomatu wyboru, T. udowodnił, że *dwa* *wielokąty są równoważne, zawsze i tylko, gdy mają równe pola*. Ale dla wielościanów rzecz się ma całkiem inaczej bo *dowolne dwa wielościany są równoważne*. Stąd wynika przeczący naszym intuicjom wniosek, który w oryginalnym sformułowaniu T. brzmi: „Dowolny sześcian można podzielić na skończoną ilość części (bez punktów wspólnych), z których następnie da się ułożyć sześcian o dwa razy dłuższej krawędzi." Dowód tego twierdzenia i dalsze badania nad rozkładami zawiera głośny artykuł Banacha i T. *Sur la décomposition de ensembles de points en parties respectivement congruentes*, [24d].

Ważnym partykularnym osiągnięciem T. jest teoria, którą on sam nazwał *geometrią elementarną* (cf. [59], oraz [48m] i [67m]). Przez (dwuwymiarową) geometrię elementarną T. rozumie ten fragment geometrii Euklidesa, który można sformułować i ugruntować bez użycia jakichkolwiek środków teoriomnogościowych. T. pokazał, że geometria ta daje się ująć w postaci teorii aksjomatycznej,E2, sformalizowanej w języku rachunku predykatów I rzędu. WE2 występują tylko dwa pojęcia specyficzne: trójczłonowa relacja *leżenia między* oraz czteroczłonowa relacja *równej odległości*; relacje te zachodzą między punktami, które są jedynymi obiektami pierwotnymi. (Dla porównania, w znanym systemie geometrii przestrzeni Hilberta występuje kilka pierwotnych obiektów geometrycznych — punkty, linie proste i płaszczyzny.) Aksjomaty, choć wyrażone wyłącznie za pomocą pojęć pierwotnych (a nie uprzednio zdefiniowanych), są relatywnie krótkie i intuicyjnie jasne. WE2 ciągłość została wyrażona za pomocą aksjomatu Dedekinda, ograniczonego do zbiorów definiowalnych za pomocą formuł rozważanego języka I rzędu. Pominięcie tego ograniczenia, i przejście do języka II rzędu lub wzbogacenie go o pojęcia mnogościowe, prowadzi wprost od E2 do systemu całej geometrii, co znaczy, że T. jasno i prosto oddzielił geometrię elementarną od geometrii pełnej. Teoria E2 jest zupełna i rozstrzygalna, ale nie jest skończenie aksjomatyzowalna (choć określona za pomocą skończonej liczby schematów aksjomatów); jej modelami, z dokładnością do izomorfizmu, są przestrzenie kartezjańskie nad ciałami domkniętymi w sensie rzeczywistym, co świadczy o trafności przedstawionej eksplikacji pojęcia geometrii elementarnej. System geometrii elementarnej Tarskiego ma długą i skomplikowaną historię (dokładnie opisaną w [99]); pierwszy układ aksjomatów T. podał w 1926–27, a około 1930 udowodnił twierdzenie o eliminacji kwantyfikatorów, mówiące że każda formuła w języku systemu jest równoważna na gruncie aksjomatów boolowskiej kombinacji wybranych formuł bazowych, i wynikający z niego wniosek o istnieniu efektywnej procedury rozstrzygania. Szczegółową i systematyczną rozbudowę geometrii na podstawie systemu Tarskiego zawiera monografia [83m].

TEORIE ROZSTRZYGALNE I NIEROZSTRZYGALNE. Teoria (logiczna, matematyczna) jest *rozstrzygalna*, jeśli istnieje efektywna metoda sprawdzania twierdzeń należących do tej teorii, tzn. istnieje przepis (algorytm) pozwalający po wykonaniu skończonej ilości ściśle określonych badań orzec o każdym zdaniu dającym się wypowiedzieć w rozważanej teorii, czy jest ono twierdzeniem, czy nie. W przeciwnym razie, teoria jest *nierozstrzygalna*. *Problem rozstrzygalności* w odniesieniu do dowolnej teorii polega na zbadaniu, czy jest ona rozstrzygalna, czy też nierozstrzygalna, i ewentualnie na dostarczeniu opisu procedury rozstrzygania. Wiadomo, że problem ten daje się rozciągnąć na inne zbiory formuł, a także na zbiory liczb czy klas pytań, a jego ścisłą matematyczną definicję wyraża się za pomocą pojęć z teorii funkcji rekurencyjnych. Historycznie ogólne zagadnienie rozstrzygalności matematyki pojawiło się w szkole D. Hilberta, gdzie szczególne pytanie o rozstrzygalność węższego rachunku predykatów nazwano *Entscheidungsproblem*.

T. uważał problem rozstrzygalności za jedno z centralnych zagadnień metamatematyki — dał temu wyraz w głośnym odczycie w Princeton w r. 1946 (cf. [01m], s. 396), w którym dokonał przeglądu ówczesnego stanu badań nad rozstrzygalnością i nakreślił program badawczy w tej dziedzinie. Wkład T. do badań nad zagadnieniem rozstrzygalności polegał na

1. udowodnieniu rozstrzygalności kilku ważnych teorii matematycznych (są to teorie elementarne, tzn. sformalizowane w logice predykatów I rzędu);

2. opracowaniu ogólnej metody dowodów nierozstrzygalności teorii elementarnych i jej zastosowaniu;

3. ustaleniu nierozstrzygalności rozmaitych formalizmów (teorii) innych niż teorie elementarne.

Ad 1. W dowodach rozstrzygalności T. stosował *efektywną* metodę eliminacji kwantyfikatorów, którą można opisać następująco. W języku rozważanej teorii T wyróżnia się w sposób efektywny pewien zbiór formuł

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

bazowych, które zazwyczaj nie zawierają kwantyfikatorów, a następnie podaje się efektywny dowód, rugując kwantyfikatory, że każda formuła φ w języku T jest równoważna na gruncie T pewnej formule φ* utworzonej z formuł bazowych za pomocą jedynie spójników prawdziwościowych i mającą te same zmienne wolne, co formuła φ, a w końcu określa się efektywną metodę, która pozwala o każdej takiej formule φ* rozstrzygnąć, czy jest ona twierdzeniem T, czy nie. Trzeba dodać, że przeprowadzenie eliminacji kwantyfikatorów dostarcza nie tylko opisu algorytmu rozstrzygania, ale zazwyczaj także wiedzy na temat zupełnych rozszerzeń teorii oraz zbiorów definiowalnych w jej modelach. Dlatego kolejne prace T. i jego uczniów (M. Presburgera, A. Mostowskiego, W. Szmielew), w których używana była metoda eliminacji kwantyfikatorów, miały rosnący wpływ na kształtowanie się idei teoriomodelowych.

Za pomocą metody eliminacji kwantyfikatorów Tarski rozszerzył wyniki C. H. Langforda dotyczące rozstrzygalności różnych aksjomatycznych teorii uporządkowania liniowego (cf. [36d]), udowodnił rozstrzygalność elementarnej teorii relacji dobrze porządkujących (zaginiona przedwojenna praca z Mostowskim, cf. [49ae], i jej kontynuacja z Donerem [78]) oraz elementarnej teorii algebr Boole'a (cf.49ac]. We wszystkich wymienionych wypadkach sklasyfikowane zostały zupełne rozszerzenia rozważanych teorii.

Najdonioślejszym rezultatem T. (zawartym w [48m], i [67ma]) — uznanym przez samego T. za jego największe obok semantycznej definicji prawdy osiągnięcie — jest eliminacja kwantyfikatorów dla elementarnej teorii liczb rzeczywistych Th(**R**), rozumianej jako ogół zdań prawdziwych w dziedzinie $\mathbf{R} = \langle R, +, \cdot, <, 0, 1\rangle$, oraz wynikające z niej wnioski: teoria Th(**R**) jest rozstrzygalna i aksjomatyzowalna za pomocą układu aksjomatów dla ciał zamkniętych w sensie rzeczywistym, co z kolei pociąga za sobą, że każde dwa ciała algebraicznie zamknięte w sensie rzeczywistym są elementarnie równoważne. Ponadto, zbiór liczb rzeczywistych jest definiowalny w **R** (za pomocą formuły I rzędu w języku struktury **R**) zawsze i tylko, gdy jest on sumą skończonej liczby przedziałów, których końce są liczbami algebraicznymi. T. postawił też trzy problemy dotyczące rozstrzygalności teorii Th(**R**) wzbogaconej o dodatkowe pojęcia algebraiczne (cf. [48m], s. 318 w

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

przekładzie polskim w [01m]); jeden z nich, wciąż nierozwiązany, to pytanie o rozstrzygalność teorii Th(**R***exp*), przy czym **R***exp* jest rozszerzeniem **R** o funkcję wykładniczą *ex*. Waga tego problemu i jego częściowe rozwiązania omówione są w artykule D. Markera 1996 oraz w recenzji C. Steinhorna 1999.

Wyniki zawarte w monografii [48m] odegrały wielką rolę w rozwoju teorii modeli i geometrii algebraicznej w drugiej połowie XX w. (prace m.in. A. Robinsona, J. Shoenfielda, P. J. Cohena, J. Axa i Kochena, L. van den Driesa, A. J. Wilkie'go); interesują się nimi również informatycy (np. prace G. E. Collinsa, cf. B. F. Caviness i J. R. Johnson 1998; Feferman 2006).

Ad 2. Wszystkie najważniejsze wyniki T., jego uczniów i współpracowników w zakresie (2) są przedstawione w *Undecidable Theories*, [53m]. Część I tej książki (autorstwa samego T.) zawiera zespół twierdzeń stanowiących ogólną metodę dowodów nierozstrzygalności, i są one wysłowione za pomocą pojęcia teorii istotnie nierozstrzygalnej i interpretacji jednej teorii w drugiej. Teoria jest *istotnie nierozstrzygalna*, jeżeli ona i wszystkie jej niesprzeczne rozszerzenia (w tym samym języku) są nierozstrzygalne. Teoria T2 jest *inerpretowalna* w T 1, jeżeli aksjomaty T 2 są dowodliwe w teorii T 1 z aksjomatów T 1 i odpowiednich definicji stałych specyficznych teorii T 2.

Oto charakterystyczny dla tej metody wynik:

Niech T *będzie dowolną teorią, a* T0 — *teorią istotnie nierozstrzygalną i skończenie aksjomatyzowalną. Jeśli* T0 *daje się zinterpretować w pewnym niesprzecznym rozszerzeniu teorii* T, *to* T *jest nierozstrzygalna*.

Można go skutecznie stosować, jeżeli dysponujemy przykładami teorii skończenie aksjomatyzowalnych i istotnie nierozstrzygalnych, które dają się łatwo interpretować w innych teoriach. W drugiej części [53m] (autorstwa Mostowskiego, Robinsona i T.) podany jest przykład takiej teorii, *teorii* Q, będącą podteorią arytmetyki liczb naturalnych, której aksjomaty wyrażają proste własności zera, funkcji następnika, dodawania i mnożenia. Dowód, że Q jest istotnie nierozstrzygalna, otrzymany został inną metodą i ma na wskroś semantyczny charakter; wykorzystuje się w nim pojęcie definiowalności zbiorów liczb naturalnych w dowolnych teoriach sformalizowanych i pewną wersję twierdzenia T. o niedefiniowalności prawdy arytmetycznej. W trzeciej części [53m] znajdujemy piękne zastosowanie metody interpretacji do dowodu

PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

nierozstrzygalności elementarnej teorii grup, kontrastującego z twierdzeniem Szmielew, że elementarna teoria grup Abelowych jest rozstrzygalna. Spośród innych rezultatów osiągniętych za pomocą ogólnej metody interpretacji wymieńmy twierdzenia o nierozstrzygalnośi elementarnych teorii krat, krat modularnych, krat modularnych z uzupełnieniem, pierścieni (cf. [49af], [49ai], [49ag]) oraz twierdzenie o istotnej nierozstrzygalność pewnego słabego fragmentu teorii mnogości (cf. [52b]). Później Tarski i Szczerba udowodnili nierozstrzygalność rozmaitych gałęzi geometrii elementarnej.

Ad 3. Spektakularnymi osiągnięciami w zakresie (3) są następujące wyniki:

I *Istnieją nierozstrzygalne podsystemy klasycznego rachunku zdań, skończenie aksjomatyzowalne za pomocą reguły odrywania i podstawiania*.

II *Równościowa teoria algebr relacyjnych oraz równościowa teoria reprezentowalnych algebr relacyjnych są nierozstrzgalne*.

III *Równościowa teoria tzw.omega algebr relacyjnych jest skończenie aksjomatyzowalna i istotnie nierozstrzygalna*.

Są one udowodnione w [87m] za pomocą rozszerzonej metody interpretacji (por §. niniejszego opracowania), i stanowią typowe przyczynki do tzw. *zawężonego* problemu rozstrzygalności (cf. [53m], s.35, i [68]).

Tarski rozważał jeszcze problemy, które nazwał problemami rozstrzygalności drugiego stopnia (cf. [53m], s. 34; [87m], s. 257 i nn). Postawił też dwa charkterystyczne dla tej materii pytania:

P1 Czy istnieje efektywna metoda pozwalająca o każdym skończonym zbiorze formuł klasycznego rachunku zdań rozstrzygnąć, czy jest on adekwatnym układem aksjomatów tego rachunku?

P2 Czy istnieje efektywna procedura, która zastosowana do dowolnej skończonej algebry skończonego typu pozwala nam odpowiedzieć na pytanie, czy algebra ta ma skończoną bazę rownościową?

Na oba pytania odpowiedź jest negatyna. Problem P1 rozwiązali Linial i Post 1949; problem P2 opierał się logikom przez wiele lat, a rozwiązanie znalazł McKenzie w 1996.

Trzeba podkreślić, że te i inne problemy T. oraz idee zawarte w *Undecidable theories* znalazły żywy oddźwięk wśród logików na całym świecie. Podumowaniem pierwszych reakcji na nie jest rozprawa

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

mamtematyków i logików z Nowosybirska (cf. Yu. Ershov *et alia* 1965). I dodać na zakończnie, że rozstrzygalność jest jednym z najważniejszych pojęć metalogicznych, a wyniki w zakresie rozstrzygalności konkretnych teorii stanowią wkład do nauki w ogóle. Dowody nierozstrzygalności mają znaczenie dla filozofii matematyki, gdyż wykazują istotnie twórczy charakter matematyki.

FORMALIZACJA PODSTAW MATEMATYKI NA PODSTAWIE RACHUNKU RELACJI. (Do skrócenia) Najogólniej mówiąc, monografia ***A formalization of set theory without variables*** [87m] dotyczy algebraizacji logiki klasycznej i podstaw matematyki. Jest dziełem o charakterze unifikującym i syntetycznym: łączy różne szkoły myślenia i kierunki badawcze, które pojawiły w dziedzinie szeroko rozumianej logiki w XIX i XX w.— niektóre z nich zainicjowane przez Tarskiego i w dużej mierze przez niego wykonane. Jednoczy ona takie dziedziny, jak semantyka Tarskiego, logika teoretyczna (czysta), logika algebraiczna, teoria rozstrzygalności, algebra uniwersalna i logika równościowa, podstawy teorii mnogości i podstawy teorii liczb oraz, co jest ważne, finitarne i konstruktywne trendy w podstawach matematyki.

W książce pokazuje się, jak można zbudować podstawy matematyki wychodząc od algebry, a nie od rachunku kwantyfikatorów. Pod tym względem ujęcie to jest podobne do podejścia teorio-kategorialnego, ale w stosunku do tego drugiego używa bardziej tradycyjnych narzędzi algebraicznych. Podstawowymi strukturami algebraicznymi, którymi się operuje, są algebry relacyjne. Pokazano, że równościowy język takich algebr, formalizm L×, jest adekwatny do wyrażenia podstaw matematyki (teorii, idei, konstrukcji itp.). Tym samym zniknąć mogą z języka matematyki kwantyfikatory, zmienne indywiduowe, a zdania przedmiotowe matematyki otrzymują postać równań, dowody zaś są derywacjami jednych równań z innych za pomocą zwykłych reguł logiki równościowej.

Przedstawimy w dużym skrócie, podstawowe idee i wyniki [87m]. W książce rozważa się trzy podstawowe formalizmy L, L+, L×, z których ostatni jest nowy.

1. Formalizm L jest to logika pierwszego rzędu z identycznością, w której jedyną stałą pozalogiczną jest *predykat należenia* ***E***. Stałymi logicznymi

są: implikacja $\rightarrow$, negacja $\neg$, kwantyfikator ogólny $\forall$ oraz predykat identyczności $\mathring{1}$ (oznaczający relację równości między indywiduami). W L występuje nieskończenie wiele zmiennych indywiduowych poindeksowanych liczbami naturalnymi. Układ aksjomatów dla L składa się z następujących schematów, w których X, Y, Z są formułami, x i y zmiennymi języka, a [X] oznacza domknięcie X w sensie Quine'a, tzn. formułę $\forall x0 \ldots \forall xn{-}1$X, przy czym $x0, \ldots, xn{-}1$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi w X uporządkowanymi według rosnącego porządku indeksów:

(AI) $[(X \rightarrow Y) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))]$

(AII) $[(\neg X \rightarrow X) \rightarrow X]$

(AIII) $[X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y)]$

(AIV) $[\forall x \forall y X \rightarrow \forall y \forall x X]$

(AV) $[\forall x(X \rightarrow Y) \rightarrow (\forall x\, X \rightarrow \forall x Y)]$

(AVI) $[\forall x X \rightarrow X]$

(AVII) $[X \rightarrow \forall x X]$, przy czym x nie wolne w X;

(AVIII) $[\neg\forall x\, (\neg x \mathring{1} y]$, przy czym x jest różne od y;

(AIX) $[x \mathring{1} y \rightarrow (X \rightarrow Y)]$, przy czym X jest formułą atomową, w której x występuje, a Y zostało otrzymane z X przez zastąpienie jednego wystąpienia x przez y.

Jedyną regułą inferencji w L jest *reguła odrywania*. Systemy (teorie) w L są określane przez podanie aksjomatów pozalogicznych, i można je utożsamiać z ogółem zdań wyprowadzalnych z takich aksjomatów oraz z (AI)–(AIX).

Opis aksjomatów (AI)–(AIX) nie wykorzystuje ogólnego pojęcia podstawiania, co w znacznym stopniu ułatwia studia metalogiczne związane z L. Zarysowaną tu formalizację T. nazwał *uproszczoną formalizacją logiki predykatów z identycznością* (w szczegółach jest ona przedstawiona w [65], a jej idea zrodziła się w związku z badaniami algebr cylindrycznych, cf. [51ab]).

Wybór L jako jednego z systemów bazowych podyktowany jest faktem, że większość znanych systemów teorii mnogości daje się w L sformalizować.

2. Formalizm L+ jest pewnego rodzaju definicyjnym rozszerzeniem L. Oprócz predykatów *bazowych* $\mathring{1}$ oraz ***E*** (należących do języka L) słownik L+

zawiera w charakterze stałych logicznych symbole $\otimes$, $\cup$, + oraz $-$, za pomocą których ze stałych $\mathring{1}$ i $\boldsymbol{E}$ konstruowane są predykaty *złożone* wedle reguły: jeśli A i B są predykatami, to predykatami są również A $\otimes$ B, A$\cup$, A + B oraz A$-$.

Np., $\mathring{1} \otimes \mathring{1}$, $\mathring{1} \otimes \boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E})-$ oraz $\mathring{1}-$ są predykatami.

Słownik L+ zawiera też drugi symbol identyczności =, który oznacza relację identyczności między relacjami dwuczłonowymi.

Formuły atomowe L+ mają postać $x\mathrm{A}y$ oraz A = B, gdzie x, y są dowolnymi zmiennymi indywiduowymi, a A i B — predykatami. Dowolne formuły są konstruowane z formuł atomowych w zwykły sposób.

Układ aksjomatów formalizmu L+ składa się z układu aksjomatów logicznych formalizmu L (wyrażonych w języku L+) oraz pięciu schematów, które można uważać za ewentualne definicje stałych $\otimes$, $\cup$, +, $-$ oraz =:

(DI) $\forall x \forall y\ [x\mathrm{A} + \mathrm{B}y \leftrightarrow (x\mathrm{A}y \vee x\mathrm{B}y)]$

(DII) $\forall x \forall y\ [x\mathrm{A}-\mathrm{y} \leftrightarrow \neg\, x\mathrm{A}y]$

(DIII) $\forall x \forall y\ [x\mathrm{A} \otimes \mathrm{By} \leftrightarrow \exists z\ (x\mathrm{A}z \wedge z\mathrm{B}y)]$

(DIV) $\forall x \forall y\ [x\mathrm{A}\cup y \leftrightarrow y\mathrm{A}x]$

(DV) $\mathrm{A} = \mathrm{B} \leftrightarrow \forall x \forall y\ (x\mathrm{A}y \leftrightarrow x\mathrm{B}y)$,

przy czym A i B są tu dowolnymi predykatami.

Pojęcie wyprowadzalności i systemu (teorii) w L+ definiowane są tak samo jak w L.

3. Formalizm L$\times$ jest ściśle związany z równościową teorią abstrakcyjnych algebr relacyjnych, wyłożoną po raz pierwszy w [51], wspólnej rozprawie T. i L. Chin. Słownik L$\times$ otrzymujemy ze słownika L+ przez usunięcie spójników logicznych, wszystkich zmiennych i kwantyfikatorów. Zatem słownik języka L$\times$ składa się z siedmiu różnych symboli; sześć z nich to symbole logiczne—dwa symbole identyczności, $\mathring{1}$ oraz =, oraz cztery operatory $\otimes$, $\cup$, + i $-$; jedyną stałą pozalogiczną jest symbol należenia $\boldsymbol{E}$. Formułami (zdaniami) w L$\times$ są równania postaci A = B, gdzie A i B są predykatami. Aparat dedukcyjny L$\times$ oparty jest na 10 schematach aksjomatów logicznych (analogicznych do postulatów dla abstrakcyjnych algebr

relacyjnych, cf. [51], s. 344). W poniższych schematach A, B, C są dowolnymi predykatami:

(BI) $A + B = B + A$

(BII) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(BIII) $(A– + B)– + (A– +B–)– = A$

(BIV) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

(BV) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$

(BVI) $A \otimes \overset{\circ}{\mathbf{1}} = A$

(BVII) $A{\cup}{\cup} = A$

(BVIII) $(A + B){\cup} = A{\cup} + B{\cup}$

(BIX) $(A \otimes B){\cup} = B{\cup} \otimes A{\cup}$

(BX) $A{\cup} \otimes (B \otimes C)– + B– = B–$.

W L× przyjmuje się tylko jedną regułę inferencji, mianowicie znaną ze szkolnej algebry regułę zastępowania równych przez równe. Systemy dedukcyjne w L× otrzymujemy przez podanie aksjomatów pozalogicznych, tzn. równań w L×; każdy taki system można utożsamić z teorią w L× generowaną przez aksjomaty pozalogiczne, tzn. ze zbiorem wszystkich równań wyprowadzalnych z takich aksjomatów oraz aksjomatów logicznych (BI)–(BX) i równań postaci A = A za pomocą jedynej reguły zastępowania równych przez równe (cf. [68] w sprawie podstaw logiki równościowej).

4. Semantyka. Realizacjami (modelami, interpretacjami) formalizmów L, L+ oraz L× są systemy relacyjne U = ⟨*U*, *E*⟩, gdzie *U* jest dowolnym niepustym zbiorem, a *E* relacją dwuczłonową na *U*. Predykat ***E*** jest interpretowany w U jako *E*, a predykat $\overset{\circ}{\mathbf{1}}$ jako relacja identyczności w *U*, tzn. jako relacja Id*U* = $\{\langle u, u\rangle : u \in U\}$. Predykaty formalizmów L+ i L× interpretowane są zgodnie z sensem aksjomatów DI–DV: jeśli predykaty A i B oznaczają relacje *R* i *S* w U, to predykaty A + B, A**–**, A ⊗ B oraz A∪ oznaczają odpowiednio: sumę Boole'owską relacji *R* i *S*, dopełnienie Boole'owskie *R* do relacji pełnej, iloczyn Peirce'owski (względny) relacji *R* i *S*, oraz konwers relacji *R*. Pojęcie spełniania i prawdy w U dla formuł poszczególnych formalizmów definiuje się wedle procedury określonej w *Pojęciu prawdy w językach nauk dedukcyjnych* [33m], i w [57]. W szczególności, zdanie postaci A = B jest *prawdziwe* w U,

zawsze i tylko wtedy, gdy predykaty A i B oznaczają w U te same dwuczłonowe relacje.

5. Porównywanie formalizmów ze względu na siłę środków wyrazu i siłę środków dowodowych. Za pomocą L+ porównuje się siłę środków wyrazu i siłę środków dowodowych formalizmów L i L×, jak również systemów w nich określonych. Ponieważ L× nie ma zmiennych, trzeba znane pojęcia, jak np. definicyjnej równoważności zastąpić przez stosowne odpowiedniki. W każdym z formalizmów L, L+ i L× mamy do czynienia z pojęciem *zdania* i pojęciem w*yprowadzalności*. Załóżmy, że S1 i S2 są formalizmami (lub systemami), w których te dwa pojęcia występują. Mówimy, że S2 jest *rozszerzeniem* S1, jeśli każde zdanie S1 jest zdaniem S2 oraz każde zdanie wyprowadzalne w S1 jest wyprowadzalne w S2. Rozszerzenie S2 jest *rozszerzeniem równomocnym* z systemem S1, jeżeli zachodzą jeszcze następujące dwa warunki:

(1) dla każdego zdania X systemu S2 istnieje zdanie Y systemu S1, które na gruncie S2 jest równoważne zdaniu S1, tzn. w S2 zdanie Y jest wyprowadzalne z X i odwrotnie—X z Y. [Taka sama siła środków wyrazu.]

(2) dla każdego zdania X i każdego zbioru zdań Ψ w S1, jeśli X jest wyprowadzalne z Ψ w S2, to X jest też wyprowadzalne z Ψ w S1. [Taka sama siła środków dowodowych.]

Mówimy wreszcie, że S1 i S2 są *równomocne*, jeżeli mają wspólne równomocne rozszerzenie, tzn. istnieje system S będący jednocześnie równomocnym rozszerzeniem S1 i S2.

Łatwo udowodnić, że L+ jest równomocnym rozszerzeniem L oraz, wykorzystując semantyczną pełność L+, że L+ jest rozszerzeniem L×. Natomiast L+ nie jest równomocnym rozszerzeniem formalizmu L×, a nawet więcej: żaden z warunków (1) i (2) nie jest spełniony. Niezachodzenie (2) wynika z semantycznej niezupełności formalizmu L×: istnieją prawdziwe równania, które nie są tezami w L+, co z kolei ma ścisły związek z zagadnieniem reprezentacji algebr relacyjnych (postawionym w [41] i rozwiązanym negatywnie przez R. Lyndona w 1950). To, że nie zachodzi (1), jest bezpośrednią konsekwencją dawnego wyniku A. Korselta: zdanie stwierdzające istnienie przynajmniej czterech przedmiotów nie daje się wyrazić w rachunku relacji. W związki z tą kwestią Tarski uzyskał o wiele silniejszy rezultat (ideowo nawiązujący do wspólnej pracy z Lindenbaumem [36b], por. także [86]):

(I) Niech F będzie formalizmem otrzymanym z L× przez dołączenie skończonej liczby nowych stałych, które w każdej realizacji L× oznaczają działania na relacjach dwuczłonowych lub relacje między relacjami dwuczłonowymi (określonymi na uniwersum dowolnej realizacji L×), i które są „logiczne" w tym sensie, że oznaczone przez nie działania i relacje są niezmiennicze ze względu na wszystkie permutacje uniwersum. Wtedy nadal istnieją zdania w L (a więc i w L+), które nie są równoważne (na gruncie F) z żadnym zdaniem formalizmu F.

Zatem nieadekwatność środków wyrazu formalizmu L× nie jest skutkiem wadliwego wyboru układu pojęć pierwotnych, ponieważ nie da się rozszerzyć tego układu w sposób skończony i „logiczny", aby osiągnąć tę samą siłę środków wyrazu, którą ma formalizm L.

(II) L× jest równomocny z L3, który jest pewnym fragmentem formalizmu L o trzech ustalonych zmiennych indywiduowych.

System L3 jest scharakteryzowany za pomocą skończonego układu aksjomatów (dość skomplikowanych), ale nie jest on identyczny z ogółem tautologii L, w których występują co najwyżej trzy ustalone zmienne indywiduowe. Zatem L3 jest semantycznie niezupełny.

Mimo wskazanej słabości środków wyrazu i dowodu formalizmu L×, niektóre systemy w L, zwane Q-systemami, mają swoje równomocne odpowiedniki w L×. System S w L nazywa się Q-systemem, jeżeli istnieją formuły D i E (w L) zawierające co najwyżej 3 różne zmienne i dokładnie dwie zmienne wolne, takie że w każdym modelu systemu S dwuczłonowe relacje definiowane przez D i E tworzą parę przystających quasirzutów, tzn. są funkcjami o następującej własności: dla każdej pary elementów x i y (należących do uniwersum modelu) istnieje z, które jest odwzorowywane na x przez pierwszą funkcję, a na y przez drugą; element z reprezentuje parę uporządkowaną $< x, y>$. Podstawowe twierdzenie o równomocnych systemach wygląda następująco:

(III) Każdy Q-system S w L jest równomocny z pewnym systemem S× w L×; ponadto, S× jest np. skończenie aksjomatyzowalny lub rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy S jest skończenie aksjomatyzowalny lub rozstrzygalny.

Twierdzenie III daje się uogólnić na *słabe* Q-systemy określone w *dowolnych* formalizmach pierwszego rzędu, w których występuje skończona liczba stałych pozalogicznych. Definicję słabego Q-systemu otrzymamy z definicji Q-systemu przez skreślenie ograniczenia dotyczącego liczby różnych zmiennych występujących w formułach *D* i *E*.

(IV) Każdy słaby Q-system U określony w formalizmie pierwszego rzędu o skończonej liczbie stałych pozalogicznych jest równomocny z pewnym systemem U× w L×; ponadto, system U× jest np. skończenie aksjomatyzowalny lub rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy U ma tę własność.

Założenia twierdzenia III są spełnione dla większości znanych systemów teorii mnogości, a założenia twierdzenia IV są spełnione przez pełną elementarną teorię liczb naturalnych, jej rekurencyjnie aksjomatyzowalny podsystem zwany arytmetyką Peana, elementarną teorię liczb rzeczywistych (ze zbiorem liczb naturalnych jako podzbiorem wyróżnionym). Każdy z wymienionych systemów jest więc równomocny z pewnym systemem określonym w L×.

Za pomocą twierdzeń I – IV badane są jeszcze rozmaite problemy, dość odległe od zagadnienia polegającego na formalizowaniu w języku L× teorii matematycznych.

Np. konstruuje się nierozstrzygalne podsystemy rachunku zdań; podaje się stosunkowo prostą definicję prawdy dla formalizmu L×; charakteryzuje się definiowalne środkami I rzędu relacje dwuczłonowe w modelach teorii mnogości i modelach arytmetyki; rozważa się skończoną aksjomatyzowalność predykatywnych wersji systemów teorii mnogości oraz zagadnienie, czy formalizmy I rzędu o skończonej liczbie zmiennych są adekwatne do zbudowania różnych dyscyplin matematycznych; definicyjną równoważność teorii liczb oraz teorii zbiorów dziedzicznie skończonych (zbiorów skończonej rangi, tzn. zbiorów, które dają się otrzymać ze zbioru pustego ∅ przez wykonanie skończenie wiele razy operacji tworzenia singletonów i operacji sumowania); zagadnienie reprezentacji algebr Q-relacyjnych i twierdzenie o nieskończonej aksjomatyzowalności teorii równościowej tych algebr; pierwsza w literaturze przedmiotu konstrukcja teorii równościowych, które mają skończone bazy i są istotnie nierozstrzygalne—przykładami tego rodzaju są pewne teorie algebr relacyjnych i grupoidów.

Monografia ***A formalization set theory without variables*** zawiera wiele otwartych problemów badawczych, które w ostatnich dwóch dekadach stymulowały rozwój logiki algebraicznej i jej zastosowań w informatyce teoretycznej; jest też bogata w treści historyczne.

Bibliografia (PEF)

A. Książki:

A. Burdman Feferman, S. Feferman: ***Alfred Tarski. Life and Logic***. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, VI + 425 ss.

J. J. Jadacki (red.): ***Alfred Tarski: Dedukcja i semantyka*** (***Déduction et sémantique***). Wydawnictwo Naukowe *Semper*, Warszawa 2003. (Materiały sympozjum odbytego 15 I 2001 w Warszawie z okazji setnej rocznicy urodzin A. Tarskiego.)

J. Woleński, E. Köhler (red.): ***Alfred Tarski and the Vienna Circle. Austro-Polish Connections in Logical Empiricism***. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999, X + 346 ss.

B. F. Caviness, J. R. Johnson (red.): ***Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic***

Decomposition. Springer-Verlag, Wien, New York, 1998, XIX + 431 ss.

J. Woleński: ***Metamatematyka a epistemologia***. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993, 326 s.

V. McGee: ***Truth, Vagueness, and Paradox. An Essay on the Logic of Truth***. Hackett, Indianapolis, Indiana 1991, X + 236 ss.

J. Etchemendy: ***The Concept of Logical Consequence***. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1990, 174 ss.

R. Wójcicki: ***Theory of Sentential Calculi. Basic Theory of Consequence Operations***. Kluwer, Dordrecht 1988, XVIII + 473 s.

J. Woleński: ***Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska***. PWN, Warszawa 1985, 348 ss.

D. Monk: ***Mathematical Logic***. Springer-Verlag, Berlin 1976, X + 531 ss.

L. Henkin i inni (red.): ***Proceedings of the Tarski Symposium***. „ Proceedings of Symposia in Pure Mathematics”, vol. XXV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1974, XXI + 498 ss.

A. Mostowski: ***Thirty Years of Foundational Studies***. „Acta Fennica Philosophica”, t. 17 (1965), 176 ss.

E. W. Beth: ***The Foundations of Mathematics. A study of the Fhilosophy of Sciences***. North-Holland, Amsterdam 1959, XXVI + 741 ss.

A. Mostowski: ***Logika matematyczna***. Warszawa – Wrocław 1948, VIII + 388 ss.

B. Artykuły:

2007

F. Rodrígez-Consuegra: *Two unpublished contributions by Alfred Tarski*. „History and Philosophy of Logic”, 28 (2007), 257–264.

2006

S. Feferman: *Tarski's influence on computer science*. „Logical Methods in Computer Science”, 2 (3:6) (2006), 1–1–13 (on line).

I. Jane: *What is Tarski'a common concept of consequence*? „The Bulletin of Symbolic Logic”, 12 (2006), 1–42.

2005

P. Mancosu: *Harvard 1940–1941: Tarski, Carnap and Quine on a Finitistic Language of Mathematics for Science*. „History and Philosophy of Logic”, 26 (2005), 327–357.

F. Rodrígez-Consuegra: *Tarski's Intuitive notion of set*. W: G. Sica (red): ***Essays on the Foundations of Mathematics and Logic***, Polimetrica International Scientific Publisher Monza, 2005, 227–266.

2004

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu

J. W. Addison: *Tarski's theory of definability: common themes in descriptive set theory, recursive functions theory, classical pure logic, and finite-universe logic*. „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 77–92.

S. Feferman: *Tarski's conception of logic*. „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004),

5–13.

S. Feferman: *Tarski's conceptual analysis of semantical notions*. W: A. Benmakhlouf (red.): ***Sémantique et épistémologie***, Editions Le Fennec, Casablanca; J. Vrin, Paris 2004, 79–108.

E. Fenstad: *Tarski, truth and natural languages*, „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 15–26.

G. Frost-Arnold: *Was Tarski's theory of truth motivated by physicalism*? „History and Philosophy of Logic" 25 (2004), 265–280.

M.Gómez-Torrente: *The indefinability of truth in the „Wahrheitsbegriff"*. „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 27–37.

H. Hiż: *Reexamination of Tarski's semantics*. „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 39–48.

W. Hodges: *What languages have Tarski truth definitions?* „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 93–113.

S. Krajewski: *Gödel on Tarski*. „Annals of Pure and Applied Logic", 127 (2004), 303–323.

V. McGee: *Tarski's staggering existential assumptions*. „Synthese", 142 (2004), 371–387.

G. F. McNulty: *Minimum bases for equational theories of groups and rings*: *the work of Alfred Tarski and Thomas Green.* „Annals of Pure and Applied Logic", 127 (2004), 131–153.

J. Mycielski: *On the tension between Tarski's nominalism and his model theory* (*definitions for a mathematical model of knowledge*). „Annals of Pure and Applied Logic", 126 (2004), 215–224.

S. J. Surma: *Between Galois connections and (some metamathematical) solutions of equations fgf = f* and *gfg = g*. „Annals of Pure and Applied Logic", 127 (2004), 229–242.

2003

J. Edwards: *Reduction and Tarski's definition of logical consequence.* „Notre Dame Journal of Formal Logic”, 44 (2003), 49–62.

A. Grzegorczyk, *Tarskiego rachunek tekstów jako właściwy teren dla definicji obliczlności*. W: J. J. Jadacki (red.): ***Alfred Tarski**: **Dedukcja i semantyka*** (***Déduction et sémantique***). Wydawnictwo Naukowe *Semper*, Warszawa 2003, 28–36.

A. Nowaczyk: *Co naprawdę powiedział Tarski o prawdzie w roku 1933?* W: J. J. Jadacki (red.): ***Alfred Tarski**: **Dedukcja i semantyka*** (***Déduction et sémantique***). Wydawnictwo Naukowe *Semper*, Warszawa 2003, 61–66.

G. Serény: *Gödel, Tarski, Church, and the Liar.* „The Bulletin of Symbolic Logic”, 9 (2003), 3–25.

J.Woleński: *Języki sformalizowane a prawda*. W: J. J. Jadacki (red.): ***Alfred Tarski: Dedukcja i semantyka*** (***Déduction et sémantique***). Wydawnictwo Naukowe *Semper*, Warszawa 2003, 67–76.

2002

T. Bays: *On Tarski on models*. „The Journal of Symbolic Logic”, 66 (2002), 1701–1726.

1–27.

M.Gómez-Torrente: *The problem of logical constants*. „The Bulletin of Symbolic Logic”, 8 (2002), 1–37.

2001

R. McKenzie: *How difficult is Tarski's finite equational basis problem?* Departament of Mathematics Vanderbilt University Nashville, Tennessee 37240 March 28, 2001.

H. Sinaceur: *Alfred Tarski: semantic shift, heuristic shift in metamathematics*. „Synthese”, 126 (2001), 49–65.

1999

D. DeVidi, G. Solomon: *Tarski on „essentially richer”metalanguages*. „The Journal of Philosophical Logic”, 28 (1999), 1–28.

S. R. Givant: *Unifying threads In Alfred Tarsk's work.* „The Mathematical Intelligencer”, 21 (1999), 47–58.

W. H. Hanson: *Ray on Tarski on logical consequence*. „The Journal of Philosophical Logic”, 28 (1999), 607–618

C. Steinhorn: Recenzja artykułu A. J. Wilkiego, „The Journal of Symbolic Logic”, 64 (1999), 910–913.

1998

A. Gupta: *Tarski*'*s definition of truth*. W: ***The Routledge Encyclopedia of Philosophy***.. Routledge, London 1998, t. 9, 256–269.

J. Pelc: *Alfred Tarski* (1902–1983) *o języku przedmiotowym*, *metajęzyku i pojęciu prawdy*. „Studia Semiotyczne, 21–22 (1998), 301–303.

A. Nowaczyk: *Czy Tarski zdefiniował pojęcie prawdy*? „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria”, 7, Nr 2(26), (1998), 5–29.

J. Zygmunt: *Polish logic*: W: *The* ***Routledge Encyclopedia of Philosophy***. Vol. 7. Routledge, London 1998, 492–500.

1997

J. M. Sagüillo: *Logical consequence revisited*. „The Bulletin of Symbolic Logic”, 3 (1997), 216–241.

R. Wójcicki: *The postwar panorama of logic in Poland*. W: M. L. Dalla Chiara *et al*. (red.): ***Logic and Scientific Methods***, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997, 497–508.

1996

S. R. Givant, V. Huber-Dyson: *Alfred Tarski w kalejdoskopie impresji osobistych*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne”, 32 (1996),

95–127.

M.Gómez-Torrente: *Tarski on logical consequence*. „Notre Dame Journal of Formal Logic”, 37 (1996), 125–151.

A. Grzegorczyk: *Tarski's conception of truth*. *Application to natural language*. „Dialogue and Universalism”, 6 no 1–2 (1996), 73–90.

D. Marker: *Model theory and exponentiation*, „Notices of the American Mathematical Society”, July 1996, 753–759.

R. McKenzie: *Tarski*'*s finite basis problem is undecidable*. „International Journal of Algebra and Computation”, 6 (1996), 49–104.

M. Przełęcki: *On the model-theoretic definition of truth*. „Dialogue and Universalism”, 6 no 1–2 (1996), 67–72.

G. Y. Sher: *Did Tarski commit* „Tarski's fallacy?”. „The Journal of Symbolic Logic”, 61 (1996), 653–686.

J. Tarski: *Philosophy in the creativity of Alfred Tarski*, „Dialogue and Universalism”, 6 no 1–2 (1996), 157–159.

R. Wójcicki: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. W: B. Skarga (red.): ***Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku***. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996, 427–438.

1994

A. Grzegorczyk: *Zmienne języka naturalnego i klasyczne definicje pojęć semantycznych*. W: J. Pelc (red.): ***Znaczenie i prawda. Rozprawy semiotyczne***. „Biblioteka Myśli Semiotycznej”, t. 26. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, 451–460.

S. Krajewski: *Tarski's definition of truth and mathematics.* W: B. Twardowski, J. Woleński (red.): ***Sixty Years of Tarski's Definition of Truth***. *Proceedings of the Conference held in Kraków, April 9–10, 1993*. Philed, Kraków 1994, 16–33.

J. Tarski: *Uwagi o artykule Woleńskiego „Alfred Tarski jako filozof „*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne”, 12 (1994), 225–269.

1993

S. Burris, S. Lee: *Tarski's high school identtities*. „American Mathematical Monthly”, ? (1993), s. 231–284.

V. McGee: *Two problems with Tarski's theory of consequence.* „Proceedings of the Aristotelian Society, New Series”, 42 (1993), 273–292.

S. J. Surma: *W duchu Tarskiego: o alternatywach teoriodowodowej metalogiki.* „Filozofia Nauki”, 1 (1993), 49–65.

J. Woleński: *Tarski as a philosopher.* W: F. Coniglione, R. Poli i J. Woleński (red.): ***Polish Scientific Philosophy*: *The Lvov-Warsaw School***. „Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities”, 28 (1993), 319–338.

1992

V. McGee: *Maximal consistent sets of instances of Tarski's schema (T)*. „Journal of Philosophical Logic 21 (1992), 235–241.

1991

S. R. Givant: *A portait of Alfred Tarski*. „The Mathematical Intelligencer”, 15 (1991), 16–32.

R. D. Maddux: *The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations*. „Studia Logica", 50 (1991), 421?–455.

W. J. Blok, D. Pigozzi: *Alfred Tarski's work on general metamathematics*. „The Journal of Symbolic Logic", 53(1988), 36–50.

Lou van den Dries: *Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields*. „The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), 7–19.

J. Doner, W. Hodges: *Alfred Tarski and decidable theories*. „The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), 20–35.

J. Etchemendy: *Tarski on truth and logical consequence*. „The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), 51–77.

P. Suppes: *Philosophical implications of Tarski's work*. „The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), 80–91.

1986

W. Hodges: *Truth in a structure*. „The Proceedings of the Aristotelian Society, New Series", 6 (1985/1986), 135–151.

W. Hodges: *Alfred Tarski*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 866–868.

B. Jónsson: *The contributions of Alfred Tarski to general algebra*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 883–889.

J. Lawrence: *Tarski's problem for varieties of groups with a commutator identity*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 75–78.

A. Levy: *Alfred Tarski's work in set theory*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 2–6.

J. Łoś: *O Alfredzie Tarskim*. „Ruch Filozoficzny", 43 (1986), 3–10.

G. F. McNulty: *Alfred Tarski and undecidable theories*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 890–898.

D. Monk: *The contributions of Alfred Tarski to algebraic logic*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 899–905.

L. W. Szczerba: *Tarski and geometry*. „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 907–912.

R. L. Vaught: *Alfred Tarski's work in model theory*, „The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), 869–882.

1985

J. Czelakowski, G. Malinowski: *Key notions of Tarski*'*s methodology of deductive sciences*. „Studia Logica”, 44 (1985), 321–351.

1971

H. Hiż: *Jubileusz Alfreda Tarskiego*. „Kultura” (Paryż), 9 (288) (1971), 134–140.

1969

W. A. Pogorzelski, S. J. Surma: Recenzja książki A. Tarskiego, ***Logic***, ***Semantics Metamathematics***. „The Journal of Symbolic Logic”, 34 (1969), 99–106.

1967

A. Mostowski: *Tarski*, *Alfred*. W: ***The Encyclopedia of Philosophy***, The Macmillan Company and The Free Press, New York 1967, t. 8, 77–81.

1965

Ju. Ershov *et alia*: *Elementry theories*. „Russian Mathematical Surveys”, 20 (1965), 35–105.

BEZ DATY

W. Hodges: *Tarski's truth definitions*. „Stanford Encyclopedia of Philosophy” (Internet).

V. Holbach: *Axiomatic theories of truth*. „Stanford Encyclopedia of Philosophy” (Internet) .

Jan Zygmunt

 PEF — © Copyright by Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu