LICZBA (gr. ἀριθμός [arithmós], łac. numerus, od indoeuropejskiego rdzenia, oznaczającego udział lub porcję, gr. νόμος [nomos]) – jedno z podstawowych pojęć ludzkiego poznania występujące już w czasach prehistorycznych, rozwinięte w takich dziedzinach kultury, jak nauka (matematyka, fizyka), filozofia (logika, epistemologia) oraz religia (symbolika religijna).

Pojęcie l. w matematyce miało zasadnicze znaczenie cywilizacyjne dla ludzkości; oddziaływało też z filozofią, modyfikując poglądy na temat tego, co ponadzmysłowe.

GENEZA POJĘCIA LICZBY. Na podstawie danych etnograficznych i lingwistycznych możemy wnioskować, że prototypem pojęcia l. były wzorce rachunkowe (naturalne i sztuczne), takie jak anatomiczne części ludzkiego ciała (najczęściej palce u rąk i nóg), pałeczki i kamyki, ale także ciała niebieskie (m.in. Księżyc). Nie dysponowano jeszcze abstrakcyjnym pojęciem l. jako wyniku pewnego rachunku, a jedynie ustanawiano wzajemną jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy liczonymi przedmiotami i ustalonym wcześniej zbiorem, służącym za podstawę tej operacji. Dysponowano nazwami, służącymi do określenia pewnej liczby obiektów, ale nie abstrakcyjnym pojęciem l., o czym świadczy m.in. to, iż w wielu językach prymitywnych zachowały się odrębne nazwy na tę samą l. różnych obiektów. Wynik rachunku wyrażany był w takich przypadkach przez podanie liczności badanego zbioru w jednostkach zbioru-wzorca (np. przedmiotów jest tyle, ile Księżyców, oczu, palców u ręki lub nacięć, np. na kościach upolowanych zwierząt). Z tego typu pojęciem l. spotykamy się już w okresie neolitu. Uogólnianie pierwotnego pojęcia l. dokonywało się w ramach wielkich cywilizacji rozwijających się w dorzeczach rzek, m.in. Nilu, Gangesu, Tygrysu i Eufratu, przez tworzenie większych l. jako złożenia – najczęściej dodawania – l. mniejszych (np. 14 uzyskiwano bądź jako sumę 10 i 4, bądź jako różnicę 15 i 1).

SYSTEMY NUMERACJI. Zasady zapisu l. za pomocą znaków zw. cyframi nazywamy systemem numeracji. Z punktu widzenia historii matematyki możemy wyróżnić następujące zasady: addytywną, subtraktywną i multiplikatywną. Numeracja addytywna jest najbardziej pierwotna i odpowiada zasadom rachunku ustanawiającego jednoznaczną zależność przez wprowadzenie kilku podstawowych znaków, np. 1, 10, 100. Zasada subtraktywna ustanawia, że zestawienie kolejnych znaków liczbowych *xy*, z których wartość liczbowa $x < y$, oznacza różnicę ich wartości liczbowej $y - x$. Natomiast wg zasady multiplikatywnej zestawienie znaków liczbowych *xy* oznacza iloczyn ich wartości liczbowych. Z zasadą multiplikatywną spotykamy się w systemie pozycyjnym.

Po raz pierwszy konsekwentnie zastosowany system numeracji pozycyjnej został zastosowany w matematyce babilońskiej w poł. III tysiąclecia przed Chr. Babiloński system liczbowy był układem sześćdziesiątkowym. W takim systemie podstawą jest l. 60. Systemy pozycyjne, ale o innych podstawach, zostały odkryte przez Majów ok. IV w. po Chr. (o podstawie 20 i z symbolem „0" wprowadzonym na początku V w. po Chr.) oraz Hindusów ok. VI w. po Chr. (o podstawie 10 i symbolem „0" z końca IX w. po Chr.). Oryginalny system numeracji występujący w Mezopotamii służył zarazem do wyrażania l. całkowitych, jak i ułamkowych (ułamki sześćdziesiątkowe) i nie posiadał znaku rozdzielenia pomiędzy jednostkami różnych rzędów. W późniejszym okresie – ok. poł. I tysiąclecia przed Chr. – pod wpływem rozwoju metod komputacyjnych w astronomii wprowadzono znak rozdzielania odpowiadający zeru w systemie hindusko-arab., ale używano go wyłącznie do oznaczenia pustych miejsc wewnątrz l., nigdy na końcu. System ten został zaadoptowany przez Greków w okresie hellenistycznym i wykorzystany m.in. w astronomii (Ptolemeusz). Z kolei system hinduski został zastosowany przez Arabów, którzy system znaków (wraz z zasadami rachowania) wprowadzony przez Hindusów nazwali rachunkiem ind. (hisab al-Hind). System ten z uwagi na wyjątkowe możliwości komputacyjne szybko rozpowszechnił się w krajach muzułmańskich, a przez europejskich kupców dotarł na Zachód. Przełomem w rozpowszechnieniu systemu numeracji hindusko-arab. było ukazanie się w 1202 *Liber abaci* Leonarda z Pizy (Fibonaciego). *Księga abaku* zawierała w przystępny sposób wyłożone zasady systemu hindusko-arab., a także pełną arytmetykę oraz algebrę równań liniowych i kwadratowych.

Odmianą systemu pozycyjnego był sposób przedstawiania wielkich l. zaproponowany przez Archimedesa. W pracy pt. *Ψαμμίτης* [Psammites] (*O sposobie liczenia ziarnek piasku)* Archimedes wypracował oryginalny system pozwalający wyrazić dowolnie wielkie l. bez stosowania notacji wykładniczej, natomiast z wykorzystaniem specjalnego układu nazw rzędów dziesiętnych.

Archimedes konstrukcję swojego sytemu liczbowego doprowadził do okresu miriado-miriadowego, dowodząc tym samym, że nie tylko można wyrazić za pomocą odpowiedniej nazwy (i symbolu) liczbę ziaren piasku na Ziemi, ale i w sferze, której promieniem była ówcześnie wyznaczona odległość do tzw. gwiazd stałych. Wynik ten był ważnym etapem w rozwoju pojęcia nieskończoności, gdyż dowodził, że można pojęciowo przedstawić (policzyć) i wyrazić za pomocą liczby w danym systemie notacji (numeracji) obiekty, których liczność intuicyjnie wydaje się nieskończona. Konsekwencją tych wyników było to, że pojęcie nieskończoności zostało odniesione wyłącznie do obiektów abstrakcyjnych (niematerialnych) już w okresie starożytnym, ale symbol służący do wyrażania pojęcia l. nieskończonej pojawił się dopiero w czasach nowożytnych. Symbol ∞ (pochodzący od zniekształcenia symbolu m, używanego alternatywnie do zapisu l. „1000" w systemie numeracji rzymskiej), stosowany także współcześnie, został zaproponowany przez ang. matematyka J. Wallisa (1616–1703).

Ewolucja pojęcia liczby. Zmiany koncepcji l. zakładanej na gruncie matematyki były najczęściej warunkowane przekonaniami filozoficznymi. Jednocześnie rozwój pojęcia l., wymuszany najczęściej potrzebami praktyki komputacyjnej, wpływał na jej filozoficzną interpretację, modyfikując status ontologiczny tej centralnej kategorii matematyki (arytmetyki). Przy próbach zdefiniowania matematyki l. traktowano najczęściej jako główny (obok pojęcia figury geometrycznej) przedmiot matematyki. Status ontyczny l. określał nie tylko przedmiot matematyki, ale także wpływał na pojmowanie samej matematyki. Uogólnianie pojęcia l. odbywało się najczęściej spontanicznie i dopiero w czasach nowożytnych uświadomiono sobie, że własności działań na l. są bardziej pierwotne od pojęcia l. Własności te określają pewnego typy struktury (grupa, pierścień, ciało), natomiast l. są jedynie elementami tych struktur, które niekoniecznie muszą dziedziczyć cechy przypisywane tzw. l. naturalnym. Prawdopodobnie pierwszym matematykiem, który podał warunek – nazwany później (w 1867) przez H. Hankela „zasadą permanentności praw formalnych" był C. Wessel (1745–1818). W praktyce warunek ten oznacza, iż przy uogólnianiu pojęcia l. należy tak zdefiniować działania na nowych obiektach, by zostały zachowane wszystkie prawa działań określone dla l. naturalnych.

L. naturalne. Faktycznie zakładana na gruncie matematyki koncepcja l. związana była z pojawieniem się abstrakcyjnego pojęcia zbioru symbolizującego dowolną konkretną l. Uogólnienie pojęcia l. okazało się jednak problemem, którego rozwiązanie wymagało zmiany poglądów na temat sposobu istnienia bytów matematycznych. Do końca XVIII w. wśród matematyków dominowało przekonanie, zgodnie z którym l. naturalne należy pojmować jako zbiory jedności. Interpretowano je zatem jako tzw. l. główne, aczkolwiek podział liczebników na główne (kardynalne) i porządkowe znany był już matematykom babilońskim i egip., a terminy „numeralia cardinalia" i „numeralia ordinaria" pojawiały się w tekstach matematycznych co najmniej od początku VI w. po Chr. H. Grassmann w 1861 rozwinął idee G. W. Leibniza l. porządkowej, ale zasadnicze rezultaty otrzymał dopiero G. Cantor, który przez wprowadzenie (w 1878) pojęcia mocy zbioru był w stanie wyjaśnić różnice pomiędzy mocami a typami dla zbiorów nieskończonych. Dzięki jego pracom stało się jasne, dlaczego l. naturalne w równym stopniu charakteryzują zbiory skończone zarówno w aspekcie ilościowym, jak i porządkowym.

Ważnym etapem w dziejach pojęcia l. była praca G. Fregego (*Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Br 1884), w której na gruncie logicyzmu (w równym stopniu dystansując się od empiryzmu, formalizmu i konstruktywizmu) pojęcia arytmetyczne redukował do pojęć logicznych. W ramach tego redukcjonizmu cała arytmetyka l. naturalnych została sprowadzona do logiki. Definiując liczby naturalne na gruncie logiki Frege wykorzystał, wprowadzone wcześniej przez Cantora, pojęcie równoliczności zbiorów, ale zbiory utożsamiał z pojęciami interpretowanymi realistycznie. Koncepcja l. w ujęciu Fregego ugruntowana została na pojęciu równoliczności zakresów. Wg Fregego l. należy rozumieć jako klasę abstrakcji od relacji równoliczności: „[...] liczba, która przysługuje pojęciu *F* [welche dem Begriff *F* zukommt], jest to zakres pojęcia *równoliczny z pojęciem F*" (cyt. za: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Pz 1994[2], 185). Rozwinięciem strategii logicyzmu w zakresie teorii l. naturalnych były prace R. Dedekinda, zwł. jego *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Brau 1888, 1965[10]), w której opracował teorię l. i indukcji zupełnej oraz aksjomatykę arytmetyki l. naturalnych, współcześnie znaną jako aksjomatyka Peano, aczkolwiek do dziś nie jest rozstrzygnięty problem niezależności wyników wł. matematyka.

Precyzyjnie problem skonstruowania arytmetyki na podstawie aksjomatycznej postawił już Leibniz. Pod jego wpływem, ale zgodnie z panującymi w XVIII w. poglądami na dydaktykę matematyki, usiłowano wykładowi arytmetyki nadać aksjomatyczno-dedukcyjny charakter. W tym celu naśladując lub wprost przejmując niektóre aksjomaty z *Elementów* Euklidesa, usiłowano dowodzić m.in. takich prawd arytmetycznych, jak 2 + 2 = 4. Przyczyna niepowodzeń zamierzeń ufundowania arytmetyki l. naturalnych na jakimś systemie aksjomatów stała się zrozumiała dopiero po udowodnieniu twierdzeń limitacyjnych, zwł. zaś twierdzenia K. Gödela (1932), wg którego w każdym sformalizowanym systemie zawierającym arytmetykę liczb naturalnych można sformułować poprawnie tezy, których ani prawdziwości, ani fałszywości nie można dowieść na podstawie przyjętego systemu aksjomatów.

L. naturalne znalazły się też w centrum zainteresowania programu „arytmetyzacji'' algebry i analizy, zainicjowanego przez L. Kroneckera (1823–1891). Matematyk ten w swoich pracach rozwinął zunifikowaną teorię różnych rodzajów l., w której punktem wyjścia była pierwotna intuicja liczby naturalnej. Pogląd ten znalazł aforystyczny wyraz w jego powiedzeniu: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" („Liczby naturalne stworzył Bóg, wszystko inne jest dziełem człowieka" – cyt. za: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wwa 1995, 98). Prace Kroneckera sytuowały się w głównym nurcie programu systematyzacji matematyki, który był rozwinięciem niektórych idei (logicyzm) Leibniza i polegał na sprowadzeniu wszystkich matematycznych teorii do jednej – podstawowej. Początkowo sądzono, że taką teorią jest arytmetyka l. naturalnych, ale już od lat 80. XIX w. – pod wpływem prac G. Cantora, R. Dedekinda i G. Fregego – okazało się, że funkcję teorii podstawowej może pełnić teoria mnogości. Dopiero jednak na początku XX w., po zaksjomatyzowaniu teorii mnogości przez E. Zermelo, możliwe stało się zredukowanie arytmetyki l. naturalnych do teorii mnogości i podanie modelu l. naturalnych w języku zaksjomatyzowanej teorii mnogości. Tym samym pojęcie l., zwł. pojęcie l. naturalnej, nie było już najbardziej podstawowym pojęciem matematycznym (obok pojęcia wielkości geometrycznej). Bardziej podstawowym okazało się pojęcie zbioru. Stąd wniosek, że przedmiotem matematyki są nie tyle l. i figury geometryczne, co zbiory.

L. całkowite i wymierne. Rozszerzenie pojęcia l. naturalnej w pierwszej kolejności dotyczyło l. ujemnych. Rachunki na takich l. były wykonywane już w ramach algebry rozwijanej przez Diofantosa (III w. po Chr.) oraz matematyków hinduskich (m.in. Arybhatę ok. V w. po Chr.). L. ujemne wykorzystywali także matematycy arab., ale niejasne były podstawy działań wykonywanych na tych abstrakcyjnych obiektach. W celu zaakceptowania tych tworów jako pełnoprawnych l. próbowano nadać im określone interpretacje. Najczęściej interpretowano je jako dług, ale Girard i Kartezjusz przedstawili geometryczną interpretację, wg której l. ujemne to odcinki skierowane przeciwnie do tych, które reprezentowały l. dodatnie (naturalne). Kartezjusz był jednym z tych matematyków XVII w., który najbardziej przyczynił się do stosowania l. ujemnych w algebrze i geometrii, aczkolwiek w swoich pracach matematycznych (*Geometria*, Ly 1649, I–II, A 1659–1661², 1683³) pierwiastki dodatnie równań algebraicznych uważał za prawdziwe (vraies), w przeciwieństwie do pierwiastków fałszywych (racines fausses), czyli ujemnych. Jednak łączył obie te kategorie w pojęciu pierwiastków rzeczywistych (réelles), w przeciwieństwie do pierwiastków urojonych (imaginaires). W swojej *Geometrii*, ustalając związek pomiędzy metodami komputacyjnymi opracowanymi teoretycznie w arytmetyce a konstrukcjami geometrycznymi, Kartezjusz zainicjował nowy dział matematyki – geometrię analityczną, oraz przyczynił się do rozszerzenia pojęcia l. Ponieważ wyniki wszystkich działań na odcinkach muszą prowadzić do odcinków, to dowolny odcinek wyrażony w stosunku do odcinka jednostkowego stawał się ekwiwalentem rozszerzonego pojęcia l. Kartezjusz utożsamił odcinki współmierne z odcinkiem jednostkowym z odpowiadającymi im l. całkowitymi i wymiernymi, ale stosował ten sam termin l. (nombre) także do odcinków niewspółmiernych, do tzw. l. niewymiernych. Jednak w tym przypadku nie nazywał takich obiektów po prostu l., ale „liczbami głuchymi” (nombres sourds).

Pojęcie l. wymiernej jako rozszerzenie pojęcia l. naturalnej ugruntował I. Newton w swojej *Arytmetyce uniwersalnej*, czyli księdze o syntezie i analizie arytmetycznej (*Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, C 1707). W pracy tej stwierdził explicite, że l. nie należy utożsamiać z l. naturalną rozumianą jako zbiór jednostek określonego rodzaju, ale z abstrakcyjnym stosunkiem jakiejkolwiek wielkości do drugiej wielkości tego samego rodzaju, przyjętej za jednostkę. Wg Newtona, l. mogą występować w trzech postaciach: jako l. całkowite, ułamkowe (wymierne) i niewymierne (surdus). Choć newtonowskie rozumienia l. zostało szeroko rozpowszechnione przez Ch. Wolffa i L. Eulera, to tzw. l. głuche nie zostały w pełni zaakceptowane jako obiekty tego samego typu co l. wymierne. W poł. XVIII w. próbowano asymilować pojęcie l. niewymiernej za pomocą pojęcia granicy przybliżeń wymiernych (A. G. Kästner), ale nie były to próby w pełni udane, głównie z powodu będącego ówcześnie w użyciu niejasnego pojęcia granicy.

W sposób ścisły l. całkowite i wymierne zostały wprowadzone do matematyki dzięki pracom K. Weierstrassa, który na początku drugiej poł. XIX w. podał model arytmetyki l. całkowitych w arytmetyce l. naturalnych. L. całkowite utożsamił z uporządkowanymi parami l. naturalnych <m, n>. W przypadku, gdy pierwsza l. była większa od drugiej, uporządkowana para reprezentowała l. całkowitą dodatnią; w przypadku, gdy pierwsza l. była mniejsza od drugiej, uporządkowana para reprezentowała l. całkowitą ujemną, zaś w przypadku równości obu l. – l. całkowitą 0.

L. całkowite zdefiniował Weierstrass jako klasy abstrakcji względem pewnej relacji równoważnościowej (zwrotnej, symetrycznej i przechodniej) w zbiorze uporządkowanych par l. naturalnych. W analogiczny sposób został skonstruowany model arytmetyki l. wymiernych w dziedzinie l. całkowitych. L. wymierne w tym modelu są zdefiniowane jako klasy abstrakcji w zbiorze uporządkowanych par l. całkowitych.

L. rzeczywiste. Pojęcie l. rzeczywistej związane jest z operacją pomiaru oraz z koniecznością wyrażania wyniku dowolnych operacji wykonywanych na l. Poszukiwanie genezy tego pojęcia musi zatem prowadzić do zagadnień układów numeracji pozwalających na zapisywanie z dowolnym przybliżeniem każdej takiej l. Z drugiej strony – możliwość dysponowania systemem numeracji pozwalającym na symboliczne przedstawianie wyniku każdego pomiaru i każdego rachunku prowadzi do prototypu pojęcia l. rzeczywistej.

Rudymentarne pojęcie l. rzeczywistej zakłada, że l. uważamy za daną wówczas, gdy możemy znaleźć jej wartość przybliżoną z dowolnym stopniem aproksymacji.

Na gruncie zasad konstruktywizmu pojęcie l. niewymiernej rozważał R. Dedekind (1831–1916). W pracy pt. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brau 1872, 1960[6]) rozwinął teorię l. niewymiernych, wykorzystując koncepcję tzw. przekrojów (zw. dzisiaj przekrojami Dedekinda). Z uwagi na analogie z teorią niewymierności Eudoksosa przedstawioną w V księdze *Elementów* Euklidesa nazywana jest także teorią Dedekinda-Eudoksosa, ale metoda zaproponowana przez Dedekinda nie jest jedynie ulepszonym wariantem teorii proporcjonalności Eudoksosa, gdyż – jak zauważył to już Dedekind – zasady, na których zbudowana jest starożytna teoria proporcjonalności, są niewystarczające do otrzymania pełnej teorii l. rzeczywistych jako stosunków wielkości reprezentujących l. wymierne. W metodzie zaproponowanej przez Eudoksosa nie ma powołania się na aksjomat ciągłości, który jest explicite wymieniony przez Dedekinda.

Innym sposobem wprowadzenia pojęcia l. niewymiernej za pomocą pojęcia granicy ciągów l. wymiernych była konstrukcja zaproponowana przez Ch. Méraya (1869–1872) i – niezależnie – przez G. Cantora. W tej konstrukcji wprowadza się pojęcie tzw. ciągów Cauchy'ego (oryginalnie ciągów podstawowych lub tzw. wariantów). Za pomocą tych ciągów, które są zawsze zbieżne, wykazuje się, że możliwe są wszystkie działania na l. niewymiernych. Tym samym wprowadza się pojęcie l. rzeczywistej, której szczególnymi przypadkami są l. wymierne i l. niewymierne.

ODDZIAŁYWANIE KONCEPCJI LICZBY NA FILOZOFIĘ. W ramach filozofii gr. najbardziej znaczący wkład do rozwoju pojęcia l. wnieśli pitagorejczycy, Platon, Arystoteles oraz neopitagorejczycy. W pierwotnym pitagoreizmie l. pojmowano jako zbiory punktów tworzących określone figury geometryczne, stąd określenia: „liczby trójkątne", „kwadratowe" itd., ale równocześnie jako archetypy i symbole rzeczy. Wg tego ujęcia wszystkie l. są konstytuowane przez dwie zasady – nieskończoną doskonałą Monadę oraz przez stworzoną niedoskonałą Diadę. Kontynuacją, ale zarazem istotną modyfikacją pierwotnych doktryn pitagorejskich na temat l. były koncepcje wysunięte przez Filolaosa. Na podstawie zachowanych fragmentów nauki pitagorejskiej o l.

można stwierdzić, że Filolaos staropitagorejską doktrynę o l. – zasadzie wszechrzeczy połączył z koncepcją harmonii; m.in. utożsamiał z l. układy elementów nieograniczonych (bezkres) i ograniczających; l. pojmował jako konieczny warunek poznania i nieseparowalny składnik harmonii. Wg świadectwa Stobajosa (*Anthologia*, I 21), nic nie może być ani poznane, ani nawet pomyślane, jeżeli nie zawiera w sobie liczby.

W aspekcie kosmologicznym harmonia jawi się jako źródło (przyczyna) kosmosu, natomiast l. przejawia się w szczegółowych aspektach rzeczy i stosunków pomiędzy rzeczami. Filolaos niekiedy utożsamiał rzeczy z l., ale równocześnie twierdził, że harmonia-l. jest ontyczną podstawą kosmosu. W ontologii Filolaosa l. jest nie tylko źródłem ładu (kosmosu), ale także kategorią, której w hierarchii bytów przysługuje najwyższe miejsce. L. jest bytem prawdziwym w tym sensie, że działanie l.-harmonii zestroiło kosmos z elementu ograniczonego i nieograniczonego oraz z prawdy i fałszu. L. jest zatem prawdą kosmosu. Idąc za intuicjami pitagorejczyków, zwł. akuzmatyków, Filolaos rozwinął także – do pewnego stopnia ją modyfikując – staropitagorejską symbolikę l. O ile w starej doktrynie pitagorejskiej l. „10" oraz tzw. arcyczwórka (tzn. τετρακτύς [tetraktýs] – 4 pierwsze l. naturalne powiązane w rozmaite związki, wizualizowane za pomocą figury geometrycznej składającej się z punktów) były symbolicznym wykładnikiem struktury świata (kosmosu), to dla Filolaosa l. te symbolizowały byt i siłę oraz czynnik organizujący kosmos.

W nurcie badawczym reprezentowanym przez tzw. matematyków badano także arytmetyczne własności l. Filozofowi ci po raz pierwszy – w ramach kultury gr. – badali prawa, jakim podlegają l., formułując wiele zależności (m.in. podali prawa podzielności l. naturalnych). Odkryli istnienie l. pierwszych, zw. przez nich l. liniowymi, gdyż nie dawały się przedstawić w postaci iloczynu dwóch czynników różnych od jedności. Obok l. liniowych wyróżnili l. prostokątne, dla których powyższa operacja była wykonalna oraz l. bryłowe, redukujące się do trzech czynników liniowych. Główną zasługą matematyków pitagorejskich było jednak odkrycie niewspółmierności, które wykorzystali w celu przebudowania matematyki na podstawach geometrycznych, z uwagi na to, iż l. nie są w stanie oddać wszelkich możliwych stosunków pomiędzy wielkościami geometrycznymi (odcinki niewspółmierne).

Ze swoistą rekonstrukcja poglądów pitagorejczyków na temat l. spotykamy się u Arystotelesa (*Met.*, 985 b – 986 a, 1080 b), wg którego „[...] tak zwani pitagorejczycy pierwszy zająwszy się naukami matematycznymi nauki te rozwinęli, a zaprawiwszy się w nich sądzili, że ich zasady są zasadami wszystkich rzeczy. [...] dostrzegli też w liczbach właściwości i proporcje muzyki; skoro więc wszystkie inne rzeczy wzorowane są, jak im się zdawało, w całej naturze na liczbach, a liczby wydają się pierwszymi w całej naturze, sądzili, że elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy, a całe niebo jest harmonią i liczbą. [...] pitagorejczycy przyjmowali jeden rodzaj liczb, mianowicie liczbę matematyczną; ale sądzili, że nie jest oddzielona, lecz z niej są utworzone wszelkie substancje zmysłowe. Tworzyli mianowicie cały świat z liczb, ale nie z liczb złożonych z abstrakcyjnych jednostek; przypuszczali bowiem, że jednostki mają wielkość przestrzenną" (tłum. K. Leśniak).

Wg świadectwa Arystotelesa (tamże, 987 b – 988 a), Platon przyjmował, że rzeczy istnieją dzięki uczestnictwu w l. oraz utożsamiał formy z l. W ujęciu Platona l. dzielą się na 2 rodzaje: 1) l. matematyczne, które są najniżej w hierarchii doskonałości w ramach świata idealnego; 2) l. idealne (metafizyczne), rozumiane jako źródło idei i istoty l. matematycznych, a tym samym nie nadające się do wykonywania na nich działań arytmetycznych. L. idealne konceptualizował Platon jako syntetyczną strukturę jedności w wielości, która charakteryzuje wszystkie poziomy rzeczywistości i wszystkie byty na każdym z poziomów ontologicznych. L. idealnych wg Platona było tylko 10, gdyż pozostałe można było do nich zredukować. Idee i l. są wzajemnie powiązane, ale w aspekcie ontycznym nie utożsamiają się, gdyż żadna idea nie sprowadza się do określonej l. Platon podzielał racjonalistyczne stanowisko gr. matematyków w zakresie l. matematycznych, które pojmował jako relacje wielkości i części wielkości, co prowadziło do oznaczania relacji za pomocą l. matematycznych.

Arystoteles odrzucił pitagorejsko-platońską koncepcję l., przyjmując, że l. nie są substancjami, ale bytami wtórnymi wobec substancji. Wg Arystotelesa do pojęcia l. dochodzimy abstrahując od własności obiektów podpadających pod zmysły i uzyskując na tej drodze abstrakty umysłu. Możliwe są różne sposoby istnienia l., ale po zbadaniu okazuje się, że „[...] liczba i wielkości przestrzenne nie mogą istnieć poza rzeczami" (tamże, 1086 a).

Najbardziej wyrafinowane pojęcie l. mieli neopitagorejczycy, którzy – w nawiązaniu do Platona – nie pojmowali l. jako zasad, ale jako znaki i oznaki zasad. Precyzując wstępne dystynkcje wprowadzone w szkole pitagorejskiej i platońskiej, neopitagorejczycy wprowadzili rozróżnienie na: 1) l. ontologiczno-metafizyczne; 2) l. teologiczno-teozoficzne. Wg Moderatosa z Gades, l. nie są konwencjonalnymi symbolami, ani tym bardziej abstrakcjami, którym odpowiadają jedynie nazwy. L. wyrażają metafizyczną strukturę świata i oddają naturę rzeczy, która jest określona przez stosunki l. (proporcje). Inny neopitagorejczyk – Nikomachos z Gerazy poszedł dalej, twierdząc, że l. należy oddawać cześć boską, gdyż poszczególnym l. (od 1 do 10) można przyporządkować różnych bogów. Szczególne znaczenie w tym przyporządkowaniu miała l. „jeden" (Monada) – była ona nie tylko najwyższą zasadą, ale także źródłem Diady, łącząc w sobie funkcje formy i materii. W alegorycznym przedstawieniu Monady nazywano ją „zbiornikiem wszystkich racji zalążkowych", Chaosem, Mieszaniną, Ciemnością i Mrokiem. Nikomach z Gerazy w traktacie *Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* [Eisagogé arithmetiké] (*Wstęp do arytmetyki*) poświęconym arytmetyce l. naukowych (ἐπισημονικοὶ ἀριθμοί [episemonikói arithmói]) trafnie scharakteryzował poglądy neopitagorejczyków na rolę l. w kosmosie. Wg tego świadectwa: „Wszystko, co natura systematycznie rozmieściła we Wszechświecie, wydaje się – zarówno w swej całości, jak i w częściach – jak gdyby z góry określone i uporządkowane wedle Liczby przez zapobiegliwość i myśl Tego, który stworzył wszystkie rzeczy. Albowiem wzorzec, poniekąd wstępny szkic, był już ustalony na skutek wszechwładzy Liczby preegzystującej w umyśle Boga, stwórcy świata – liczby-idei pod każdym względem absolutnie niematerialnej, będącej jednak zarazem prawdziwą i wieczną esencją; stąd też zgodnie z Liczbą, jak gdyby podług planu artysty, zostały stworzone wszystkie te rzeczy – Czas, ruch, nieba, ciała niebieskie tudzież wszystkie cykle wszystkich rzeczy" (cyt. za: M. C. Ghyka, *Złota l.*, 24).

Neopitagorejczycy rozwinęli mistykę l. (arytmologię), którą przejęło wczesne chrześcijaństwo, adaptując ją na gruncie tradycji biblijnej i rozbudowując w duchu chrześcijańskim. Egzegeci aleksandryjscy (m.in.

Klemens Aleksandryjski, Filon z Aleksandii) uczynili arytmologię głównym składnikiem alegorycznej wykładni Pisma Świętego. Do tej tradycji nawiązywał już św. Ambroży, ale głównie św. Augustyn z Hippony, który wykładnię tę doprowadził do skrajności i utwierdził w przekonaniu, że „[...] nie można [...] lekceważyć nauki o liczbach: ci, którzy bacznie się przyglądają, z licznych miejsc Pisma świętego zupełnie wyraźnie widzą, jak wysoko powinno się ją cenić” (*O państwie Bożym*, tłum. W. Kornatowski, Wwa 1977, księga 11, rozdz. XXX 43). Augustyn traktował l. zarazem jako zasadę porządku (formy, proporcji), jak i piękna (doskonałości), a nawet prawa. W interpretacji Augustyna, który w dużej mierze podążał śladami Plotyna, idee są wiecznymi (atemporalnymi) l., ciała natomiast – l. temporalnymi, rozwijającymi się w czasie w kolejnych stadiach rozwojowych (jak roślina, która kiełkuje, rośnie, kwitnie i wydaje nasiona), ale nie tylko, gdyż można je traktować także jako całości składające się z l. uporządkowanych i l. części wzajemnie względem siebie rozmieszczonych. W szczególności racje zalążkowe są l. ukrytymi, a ciała l. uzewnętrznionymi.

L. (arytmetyczne) są – wg Augustyna – obrazem hierarchii bytów, gdyż zaczynają się od doskonałej monady (jedynki), a kończą się na przypadkowych wartościach, podobnie jak w hierarchii rzeczywistych bytów, które biorą początek w najwyżej jedności – w Bogu, zaś kończą na mniej doskonałych jednostkach. Augustyn w swoich pismach podawał też alegoryczną interpretację l. występujących w Piśmie Świętym; np. pisał o szóstce, że nie tylko jest doskonała z uwagi na racje podawane przez (neo)pitagorejczyków (m.in. to, że znajduje się „w środku liczb parzystych”, między 2 a 10), ale także dlatego, że jest to l. dni stwarzania świata przez Boga. Św. Augustyn proponując podział dziejów świata na epoki, z uwagi na l. dni stworzenia przyjął, że także będzie ich 6.

Alegoryczna wykładnia l. dotarła do kultury średniowiecznej Europy za pośrednictwem pism św. Augustyna (zwł. dzięki jego *Ennarationes in Psalmos*) oraz różnego typu kompilacjom, z których najbardziej znaczącą była praca Eucheriusza z Lyonu pt. *Formulae spiritualis intelligentiae ad Uranium*, a także zależne od pism Nikomacha z Gerazy, Augustyna, Eucheriusza i Boecjusza kompilacje Kasjodora: *Expositio Psalmorum* oraz (poświęcona sztukom wyzwolonym) druga księga *Institutiones*. Pisma te wpłynęły nie tylko na filozoficzno-teologiczne spekulacje tego okresu, ale także na budownictwo kościelne romańskie i gotyckie, aż do czasów baroku. Tym samym motyw adaptacji wyników spekulacji liczbowych w architekturze, ciągnący się od czasów budowy egip. piramid, przez imponujące konstrukcje świątyń gr. i rzymskich, w czasach budowy średniowiecznych katedr zyskał nowy wymiar. Często prawdy wiary były zawierane w liczbowych proporcjach leżących u podstaw zasad architektonicznych średniowiecznych budowli sakralnych.

Zasady arytmologii były rozwijane także w późnym średniowieczu i renesansie, gdyż dziedzictwo neopitagoreizmu wzmocnione łacińską tradycją szkoły w Chartres uzyskało w tym czasie nowe perspektywy rozwoju. Mikołaj Kuzańczyk próbując wnieść także do teologii biblijnej typową dla via pitagoreica fascynację tajemniczością liczb napisał: ,,[...] dzięki liczbie uzyskaliśmy możność zrozumienia, iż nienazywalnemu Bogu właściwsza jest absolutna jedność, gdyż Bóg to Jedno będące w akcie wszystkim, czym być może" (*O oświeconej niewiedzy*, tłum. I. Kania, Kr 1997, 55).

Idący za Kuzańczykiem Bernhard von Waging w swojej *Defensiorum laudatorii Doctae Ignorantiae* był głęboko przekonany, że symbolika l. wypracowana przez neopitagorejczyków może być pomocna w praktyce mistycznej, pomagając zrozumieć to, co ze swej istoty jest niewyrażalne i nieprzekazywalne. Takie rozumienie l. sprawiało, że adepci studium teologicznego mieli do dyspozycji, w celu zgłębienia „enigma ad venationem" Boga i spraw Bożych, rozbudowany system symboli, który miał ułatwić realizację intelektualnej strony doświadczenia mistycznego. Orientację tę wspierał autorytet Jakobusa Fabera Stapulensisa (Jakub Lefèvre d'Étaples), który pisał o potrzebie posługiwania się zasadami arytmetyki w teologii. Wątek ten znajdował silne wsparcie w samym Piśmie Świętym, które w wielu miejscach (m.in. Mdr 11, 20; Syr 1, 9; Mt 6, 27; 10, 30) wspomina, że Bóg uformował naturę każdego bytu i dokonał stworzenia świata wg l., miary i wagi.

W związku z kryzysem arystotelesowskiej filozofii przyrody i scholastycznej dialektyki w przekonaniu wielu przedstawicieli renesansowej filozofii przyrody (m.in. G. Pico della Mirandola) malała wartość dyskursu logicznego na rzecz kabały rozumianej jako droga docierania do duchowej istoty rzeczy przez interpretację różnych znaków, zwł. l. Zauważono wówczas liczne podobieństwa pomiędzy żydowską kabałą a pitagorejską metafizyką l. Konstatacja ta była dobrze osadzona w źródłach, gdyż żydowska kabała ma 2 komponenty: starożytną magię egip. i aleksandryjską arytmologię, w której mistyka l. (dekada, pentada, tetraktys) pełniła zawsze zasadniczą rolę. Z arytmologicznym wątkiem kabały wiążą się też praktyki mantyczne, wykorzystujące transpozycje symboli astrologicznych do symboli numerycznych, a także techniki dewinacyjne i teurgiczne stosujące różnego typu kombinacje l. i przyporządkowanym im cyfr oraz metodę permutacji słów, cyfr i l. (tzw. gematria, notarikon, temura). Techniki te rozwinęły się w złożony system mantyczny (numerologia), który – choć wypierany przez kulturę scjentystyczną – znajduje we współczesnym świecie trwałe miejsce w ramach różnego typu ruchów neognostycznych we współczesnej formacji ideowej zw. New Age.

Rozwój nowożytnego empiryzmu wpłynął nie tylko na zamianę profilu tradycyjnej problematyki filozoficznej, wprowadzając analizy epistemologiczne w miejsce rozważań dotyczących bytu, ale także spowodował, że przedmiotem zainteresowania filozofów stała się nie tyle l., co idea l. W empirystycznej filozofii J. Locke’a l. – obok przestrzeni, trwania i nieskończoności – była traktowana jako egzemplifikacja tzw. modi prostych. Wg Locke’a, modi liczby mają naturę addytywną (koncepcja l. tworzonej przez dodawanie jedności), zaś proste modi l. są najbardziej wyraźne wśród modyfikacji innych idei. Idea l. jest też najprostszą i najpowszechniejszą. Idee l. są łatwiejsze do odróżnienia od idei rozciągłości, zaś dowody dotyczące l. są najściślejsze. Poza tym – zdaniem Locke’a – l. daje najjaśniejszą ideę nieskończoności.

Nowa orientacja w filozofii nowożytnej spowodowała, że tradycyjna problematyka metafizyki l. została zastąpiona szeregiem zagadnień dotyczących różnych epistemicznych aspektów koncepcji l., w tym genezy i rozwoju tej podstawowej kategorii matematyki. W tym nurcie oryginalną koncepcję genezy l. opracował – na podstawie ogólnych założeń sensualizmu – É. B. de Condillac, który uważał, że ideę l. tworzy przypominanie kilku różnych kolejnych wrażeń. Wychodząc z odmiennych założeń I. Kant pojął l. jako schemat wielkości. Wg niego pojęcia poszczególnych l. naturalnych wytwarzane są przez odnoszenie kategorii ilości do takiej formy naoczności, jaką jest czas pojęty – w opozycji do czasu empirycznego – jako czysto naoczna forma następstwa.

STATUS ONTOLOGICZNY LICZBY. Filozoficznie problemem najbardziej doniosłym jest zagadnienie istnienia l. Na gruncie filozofii matematyki problem ten był rozstrzygany różnie dla poszczególnych zbiorów l. Najmniej kontrowersyjne jest istnienie l. naturalnych, ale już realne istnienie l. rzeczywistych, ale jeszcze bardziej istnienie tak abstrakcyjnych obiektów, jak kwaterniony, oktawy Cayleya czy l. p-adyczne (z nieskończoną liczbą cyfr) jest trudne do zaakceptowania przy założeniach konstruktywistycznego (intuicjonistycznego) programu metamatematycznego.

W zaproponowanej przez L. E. J. Brouwera wersji intuicjonizmu, zdecydowanie skierowanej przeciw platonizmowi (realizmowi pojęciowemu), jak i nominalizmowi, zawierającej natomiast ontologiczną tezę konceptualizmu, głosi się, że matematyka jest wolnym wytworem ludzkiego rozumu. Pociąga to za sobą ontologiczną tezę, zgodnie z którą istnieć to tyle, co być skonstruowanym w skończonym ciągu operacji. Stanowisko to implikuje odrzucenie aktualnej nieskończoności, w szczególności zaś odrzuca istnienie zbiorów nieprzeliczalnych oraz kardynalnych l. pozaskończonych innych niż $\aleph_0$ (Alef zero – symbol oznacza moc zbioru nieskończonego przeliczalnego). Zgodnie ze stanowiskiem konceptualistycznym – w wersji mentalistycznej – l. istnieją jedynie w świadomości poznającego (konstruującego) je podmiotu. Stanowisko konceptualistyczne może jeszcze występować w wersji obiektywistycznej i finitystycznej. W wersji obiektywistycznej dopuszcza się, że konstrukcje (l.) istnieją niezależne od podmiotu, ale istnienie obiektów, z których mają być konstruowane, musi być intuicyjnie oczywiste. Natomiast w wersji finitystycznej, która zbliża się do stanowiska nominalistycznego, postuluje się, by konstrukcje ograniczyć do przekształcenia obiektów czasowo-przestrzennych (napisów).

Odmiennie problematyka istnienia l. wygląda w logicyzmie, który najczęściej stowarzyszony jest z ontologicznym realizmem (G. Frege). Wówczas – jak ujmują to zwolennicy tego stanowiska – pojęcia matematyczne, zwł. l. istnieją niezależnie od poznającego je umysłu (tzn. niezależnie od naszych definicji i konstrukcji), nie redukują się też – jak postulują to nominaliści – do nazw (napisów).

Wg nominalistów, których znajdujemy w różnych nurtach filozofii matematyki, m.in. w formalizmie (H. B. Curry), ale także w logicyzmie (m.in. B. Russell), istnieją tylko przedmioty jednostkowe, a wszelkie wypowiedzi o innych obiektach możemy zinterpretować jako wypowiedzi o indywiduach. Formalistyczne rozumienie matematyki zakłada, że jej przedmiotem (D. Hilbert) są konkretne symbole o bezpośrednio rozpoznawalnej strukturze lub – inaczej ujmując – układ treściowo niezinterpretowanych, ale ściśle zaksjomatyzowanych wyrażeń sformalizowanego języka. Istnienie jest wówczas redukowane do kryterium wewnętrznej niesprzeczności. L. istnieją jako nieprowadzące do sprzeczności formuły języka poszczególnych teorii matematycznych.

W zależności od tego, jak rozumie się indywiduum, wyróżniamy (neo)nominalizm formalny i merytoryczny. Wg zwolenników stanowiska nominalistycznego formalnego (m.in. N. Goodman, H. Field) odrzuca się zbiory z uwagi na to, że są niedefiniowalne; dopuszcza się natomiast istnienie innych obiektów tylko wówczas, gdy traktowane są jako przedmioty indywidualne. Zgodnie z tym stanowiskiem, l. istnieją tylko jako nazwy indywiduów. Natomiast (neo)nominalizm merytoryczny znajduje zwolenników wśród przedstawicieli skrajnej wersji nominalizmu, tzw. reizmu (T. Kotarbiński), który dopuszcza istnienie tylko określonego typu przedmiotów jednostkowych – konkretnych ciał fizycznych. Wg tego stanowiska l. można, co najwyżej, utożsamiać z ciałami fizycznymi, na których są zapisane. W ramach tego stanowiska postuluje się nie tylko eliminowanie z języka matematyki nazw pojęć ogólnych (np. zbiór), ale nawet nazw poszczególnych l. naturalnych.

O. Töplitz, *Das Verhältniss von Mathematik und Ideenlehre bei Plato*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 1 (1929–1931), 3–33; M. C. Ghyka, *Le nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le dévelopement de la civilisation occidentale*, I–II, P 1931[2] (*Złota l. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, Kr 2001); R. Menninger, *Zahlwort und Ziffer*, Br 1934, I–II, Gö 1957–1958[2], 1979[3]; D. E. Smith, J. Ginsburg, *Numbers and Numerals*, NY 1937; D. Forstner, *Die Welt der Symbole*, In 1961, 1967[2] (pod nowym tytułem: *Die Welt* *der christlichen Symbole*, In 1977[3], 1986[5]; *Świat symboliki chrześcijańskiej*, Wwa 1990, 41–55); W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon,* Nü 1962; A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, Wa 1964, 1998 (*Matematyka w starożytności*, Wwa 1968); *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Da 1965, 45–75; M. Lohr, *Zagadnienie arytmetyki w pismach Kasjodora*, Studia Warmińskie 6 (1969), 493; G. Flegg, *Numbers and Counting*, Milton Keynes 1974; J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Lo 1976, Natick 2001[2]; J. N. Crossley, *The Emergence of Number*, Yarra Glen 1980, Singapore 1987[2]; H. H. Field, *Science without Numbers. A Defence of Nominalism*, Ox 1980; G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, P 1981; J. W. Wevers, *Text History of the Greek Numbers*, Gö 1982; G. Flegg, *Numbers. Their History and Meaning*, Lo 1983; G. Ifrah, *Le chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, P 1985 (*Dzieje l. czyli historia wielkiego odkrycia*, Wr 1990); J. H. Conway, R. K. Guy, *The Book of Numbers*, NY 1995 (*Księga l.*, Wwa 1999, 2004[2]); J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Tw 2000, 198–228.

Zenon E. Roskal

