ANTYNOMIA (gr. ἀντι- [anti] — przeciw; νόμος [nomos] — prawo, zasada) — sprzeczność w rozumowaniu, polegająca na tym, że wychodząc z przesłanek, których prawdziwość nie budzi wątpliwości, i posługując się regułami rozumowania uznanymi za poprawne, dochodzimy do sprzeczności. Na gruncie logiki formalnej obowiązuje definicja a. zrelatywizowana do pojęcia systemu: a. jest to dowód dwóch zdań sprzecznych na gruncie jakiegoś systemu. Zamiast terminu „antynomia" używa się często określenia „paradoks".

Pierwsze a. pojawiły się w starożytności w postaci tzw. paradoksów megarejczyków, z których najbardziej znaną jest a. kłamcy, przypisywana Eubulidesowi. Z tego, że kłamca mówi, iż kłamie, wynika zarazem, że on kłamie i że mówi prawdę. A. ta była rozważana przez całe dzieje filozofii, a na nowo dyskusje nad nią odżyły w XIX/XX w., kiedy analizując podstawy logiki i matematyki odkryto możliwość konstruowania wielu a. Fakt ten spowodował przełom w badaniach nad podstawami nauk formalnych, a. podważały bowiem ufność do języka naturalnego (doprowadziając do jego precyzacji) oraz odsłoniły różne założenia tkwiące u podstaw nauk formalnych.

Rozróżnia się dwa zasadnicze rodzaje a.: a. semantyczne, czyli takie, które są związane z pojęciami semantycznymi, takimi jak: prawdziwość, spełnianie, oznaczanie, dotyczącymi relacji między wyrażeniami języka a rzeczywistością, oraz a. logiczne, które są sformułowane za pomocą terminów rachunku predykatów lub rachunku zbiorów (teorii mnogości); te ostatnie nazywa się często a. teoriomnogościowymi (w odróżnieniu od wcześniej wymienionych, zw. logicznymi).

A. semantyczne opierają się na użyciu pojęć semantycznych w kontekstach związanych z wypowiedziami samozwrotnymi. Najbardziej znanymi a. semantycznymi są: a. kłamcy, a. wyrazu heterologicznego (pojęcia oznaczania), zw. a. Grellinga z 1908 (znana w średniowieczu jako a. wyrazu, który sam siebie nie oznacza — vox non appellans se), a. Barrego (a. pojęcia denotowania), a. zdań samostosowalnych, a. pojęcia spełniania czy a. Richarda (dotycząca semantycznego pojęcia określania, definiowania własności lub zbioru przez formę zdaniową). Najbardziej znaną a. kłamcy można przedstawić, za Łukasiewiczem, w następującej postaci: Na zamieszczonym poniżej obszarze I występuje następujące zdanie:

I
Zdanie napisane na obszarze **I** nie jest prawdziwe

Jeśli przyjmiemy dwie przesłanki: a) Zdanie napisane na obszarze **I** = „Zdanie napisane na obszarze **I** nie jest prawdziwe" (jest to przesłanka empiryczna; aby uznać jej prawdziwość należy zauważyć, że zdanie napisane na obszarze **I** jest identyczne ze zdaniem, którego nazwę cudzysłowową mamy w przesłance (a) po prawej stronie identyczności); b) *p* jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy *p* (jest to przesłanka podająca pewne określenie zdania prawdziwego). Prawdziwość obu przesłanek nie budzi wątpliwości. Jeśli w (b) podstawimy za zmienną zdaniową *p* zdanie napisane na obszarze **I**, a potem skorzystamy z reguły zastępowania członów identyczności, otrzymamy wyrażenie: „Zdanie napisane na obszarze **I** jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie napisane na obszarze **I** nie jest prawdziwe"; a na podstawie tego wyrażenia można udowodnić dwa wyrażenia sprzeczne.

W sformułowaniach a. semantycznych mamy do czynienia z wyrażeniami należącymi do pewnego języka, obok których występują terminy semantyczne dotyczące wyrażeń tego języka. A. semantyczne wykazały, że taki język (system), który zarazem zawiera wyrażenia pewnego języka i terminy semantyczne dotyczące tych wyrażeń jest sprzeczny. Dlatego jednym ze sposobów prowadzących do uchylenia tych a. jest dokładne odróżnienie języka od metajęzyka (języka wyższego rzędu, którego terminy dotyczą wyrażeń języka przedmiotowego); jeśli bowiem system jest niesprzeczny, to metasystem zawierający terminy semantyczne dotyczące wyrażeń tego języka nie może być częścią tego systemu.

A. logiczne opierają się na możliwości definiowania pewnych własności w języku rachunku predykatów lub rachunku zbiorów. Najbardziej znaną jest tzw. a. Russella, odkryta w 1902. Obok niej znane są następujące a.: a. zbioru uniwersalnego (a. największej liczby kardynalnej), a. zbioru wszystkich zbiorów (a. Cantora), a. zbioru wszystkich liczb porządkowych (a. Burali-Fortiego z 1897).

A. Russella, czyli a. zbioru zbiorów, które nie są swoimi elementami, można przedstawić następująco:

Na gruncie teorii mnogości można zdefiniować pewną klasę tych i tylko tych zbiorów, które nie są swoimi elementami: $A \in R \equiv A \notin A$. Podstawiając w tej definicji stałą R za zmienną A, otrzymujemy równoważność: $R \in R \equiv R \notin R$, na podstawie której można łatwo udowodnić dwa wyrażenia sprzeczne: $R \in R, R \notin R$.

Sformułowanie tej a. doprowadziło do kryzysu w podstawach teorii mnogości. A. ta różni się bowiem od innych a. logicznych tym, iż nie opiera się na żadnych twierdzeniach rachunku zbiorów poza wymienioną definicją, a zatem jej źródło leży w samych podstawach teorii mnogości. Jest nim tzw. aksjomat definicyjny (komprehenzji) głoszący, że dla każdego warunku sensownego istnieje zbiór przedmiotów spełniających ten warunek. A zatem, jeśli warunek dotyczy nie-bycia przez zbiór swoim elementem, to taki zbiór winien istnieć, a zatem definicja Russella jest poprawna. Aby usunąć a., trzeba było dokonać sprecyzowania pojęcia zbioru tak, by ograniczyć działanie aksjomatu definicyjnego. Można tego dokonać na dwa sposoby: 1) przez ograniczenie zbioru wyrażeń sensownych (tak, by wyrażenia takie jak $R \in R$ nie mogły być uznane za wyrażenia sensowne; można tu wymienić różne wersje tzw. teorii typów); 2) nie zacieśnia się pojęcia wyrażenia sensownego, ale ogranicza się sformułowanie aksjomatu definicyjnego, wprowadzając aksjomat lub zespół aksjomatów stwierdzających, iż dla funkcji pewnego rodzaju istnieją zbiory przedmiotów spełniających te funkcje; prowadzi to do różnych ujęć tzw. aksjomatycznej teorii mnogości.

Wg prostej teorii typów sformułowanej w 1921 przez L. Chwistka (oraz F. P. Ramseya, W. Wilkosza, A. Tarskiego, R. Carnapa; wcześniej, tj. w 1908, Russell zbudował tzw. rozgałęzioną teorię typów) odróżnia się różne typy logiczne przedmiotów. Najniższy typ stanowią indywidua nie będące zbiorami, następnie są zbiory indywiduów, zbiory zbiorów indywiduów itd. Tej ontologicznej hierarchii logicznych typów przedmiotów odpowiada syntaktyczna hierarchia typów wyrażeń odnoszących się do owych typów przedmiotów. Wyrażenie jest zbudowane zgodnie z zasadą teorii typów, gdy po lewej stronie funktora występuje zmienna lub stała typu n, a po prawej stronie tego funktora zmienna (stała) typu $n + 1$; jeśli tak nie jest, dane wyrażenie nie jest wyrażeniem sensownym. Definicja Russella nie jest więc poprawna, gdyż zarówno w jej definiensie, jak i w definiendum po obu stronach funktora występują wyrażenia tego samego typu. Pewną odmianą prostej teorii typów jest teoria kategorii składniowych S. Leśniewskiego. Teoria mnogości oparta na teoriach typów ma jednak pewne wady, wprowadza bowiem trudne do zaakceptowania założenia filozoficzne oraz prowadzi do tzw. typikalnej wieloznaczności pojęć, tzn. tego samego pojęcia (np. pojęcia liczby 2) nie można stosować do różnych przedmiotów, a tylko do przedmiotów określonego typu; zamiast jednej stałej (np. liczby 2) mamy więc nieskończoną liczbę stałych (liczby 2 należące do różnych typów).

Ze względu na wskazane wyżej niedogodności teorii typów powszechnie przyjął się drugi ze wskazanych sposobów zwalczania a. Russella, tzn. różne wersje aksjomatycznej teorii mnogości. W 1908 E. Zermelo zbudował pierwszy system aksjomatycznej teorii mnogości, potem doskonalony, którego jednym z najprostszych ujęć jest tzw. system Zermeli-Fraenkla-Skolema (lub Zermeli-Fraenkla). Przyjmuje się w nim zamiast aksjomatu definicyjnego tylko pewne szczególne przypadki tego aksjomatu, aby zapewnić istnienie określonych rodzajów zbiorów; wystarczają one do przeprowadzania dowodów zasadniczych twierdzeń teorii mnogości, a są tak dobrane, iż nie stwierdzają istnienia zbiorów, których przyjęcie prowadzi do a. Do innego rodzaju systemów aksjomatycznych należy system skonstruowany przez P. Bernaysa (zw. systemem von Neumana-Bernaysa-Gödla), w którym odróżnia się pojęcie zbioru i klasy.

Bibliografia: A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Wwa 1948, 207–221, 315–320; A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, *Foundation of Set Theory*, A 1958, 1973[2]; L. Borkowski, *Logika formalna*, Wwa 1970, 1977[2], 285–314, 357–362; S. Haack, *Philosophy of Logics*, C 1978, 135–151; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lb 1991, 213–223, 353–356; A. Tarski, *Prawda*, Wwa 1995, 240–242, 292–317.

Marek Lechniak

